LINEAIRE PROGRAMMERING EN SPELTHEORIE

door

Prof.Ir. J.W. Cohen

Mathematatisch Instituut
der Rijksuniversiteit
te Utrecht

Uitgave 1974

Literatuurverwijzingen

Lineaire Programmering

1. Collatz, L. & Wetterling, W. Optimierungsaufgaben, Springer Verlag, Berlin, 1966.

2. Ackoff, R.L. & Sasieni, M.W. Fundamentals of Operations Research, Wiley, New York, 1968.

3. Gue, R.L. & Thomas, M.E. Mathematical Methods in Operations Research, Macmillan, New York, 1968.

4. Vajda, S. Mathematical Programming, Addison Wesley Publ. Co. London, 1961.

5. Dantzig, G.B. Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1963.

6. Abadie, J. Nonlinear Programming. North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1967.

7. Vajda, S. Probabilistic Programming, Academic Press, New York, 1972.

Speltheorie

1 Zie L.P. [1]

2 Zie L.P. [4]

3 Mc. Kinsey, J. Introduction to the Theory of Games. Mc Graw Hill Book Co. New York, 1952.

4 Blaquière, A., Gérard, F., Leitmann, G. Quantitative and Qualitative Games, Academic Press, New York, 1969

Lineaire Programmering

1 Inleidend Voorbeeld.

zie Collatz & Wetterling. blz. 3.

Boerderij bezit stal met plaats voor
50 koeien, 200 schapen
en
beschikt over 72 morgen weideland,
en
per jaar over 10.000 arbeidsuren
voor verzorging van koeien, schapen.

1 Koe vergt 1 Morgen weideland
en 150 arbeidsuren per jaar.

1 schaap vergt 0,2 Morgen weideland
en 25 arbeidsuren per jaar.

Opbrengst per jaar van een koe ƒ 250,-
" " schaap ƒ 45,-

Probleem

Bepaal aantal koeien (x_1) en aantal schapen (x_2) zodanig dat jaaropbrengst zo groot mogelijk is.

Derhalve: x_1 en x_2 zodanig te bepalen dat

(1.1) $$Q(x_1,x_2) \overset{\text{def}}{=} 250x_1 + 45x_2 \quad \text{maximaal}$$

(1.2) $$\begin{cases} x_1 \le 50 \\ x_2 \le 200 \\ x_1 + 0{,}2\,x_2 \le 72 \\ 150x_1 + 25x_2 \le 10.000 \end{cases}$$

(1.3) $$\begin{cases} x_1 \ge 0. \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

De betrekkingen (1.1), (1.2) en (1.3) behelzen:

Het <u>optimaliseren</u> van een <u>lineaire functie</u> in meerdere variabelen (1.1) met <u>nevencondities</u> (1.2) en <u>teken condities</u> (1.3).

Meetkundige voorstelling

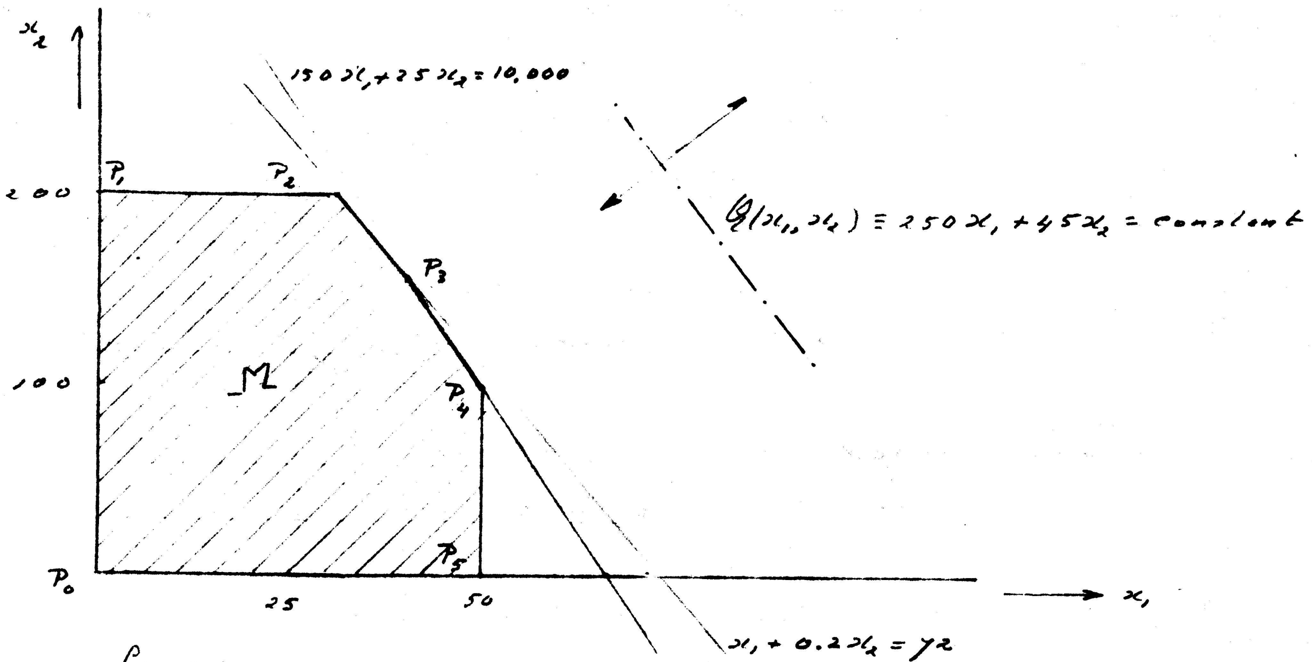


fig. 1.1

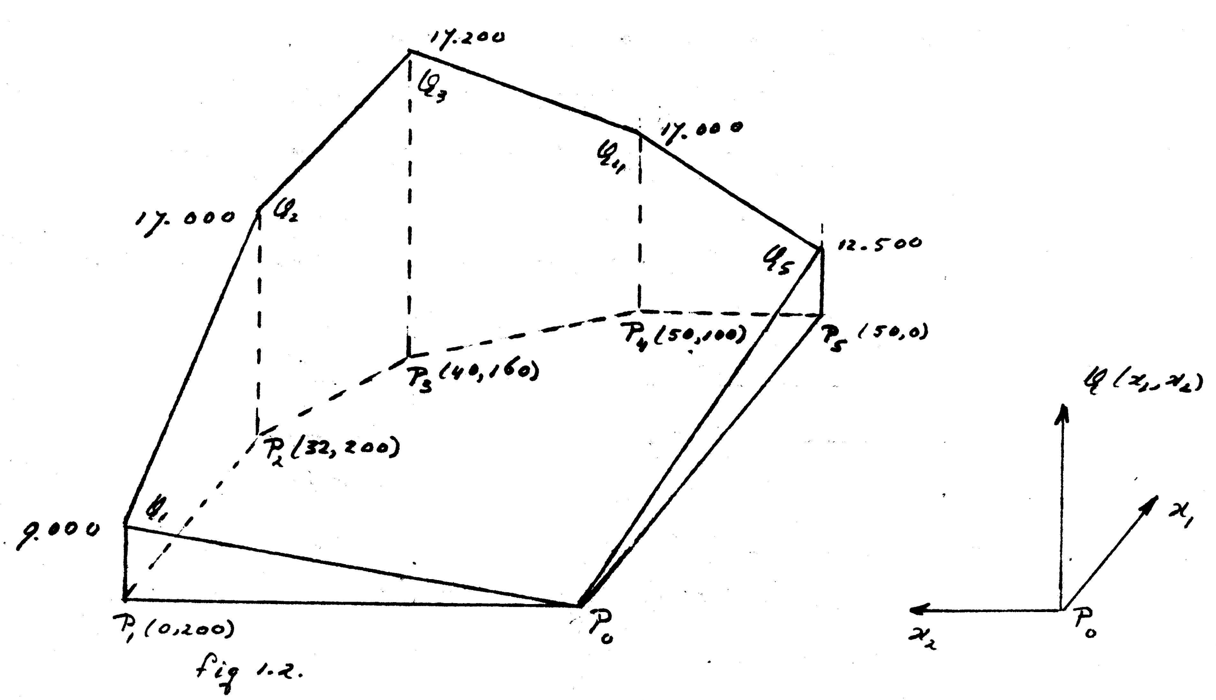


fig 1.2.

In fig 1.1 stelt M het gebied voor waar aan de nevencondities en de tekencondities } voldaan wordt.

In fig 1.2. is de functie $Q(x_1, x_2)$ als functie van x_1 en x_2 getekend. De punten $P_0\ Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4\ Q_5$ liggen in één plat vlak, we hebben hier een afgeknot prisma.

Op het gebied M bereikt $Q(\cdot,\cdot)$ blijkbaar zijn maximum op de rand van M, en in onderhavige geval in een hoekpunt (P_3) van M.

Zou rechte $Q(x_1, x_2) =$ constante // zijn met P_2P_3 (of P_3P_4) dan bereikt in elk punt van lijnstuk P_2P_3 (of P_3P_4) $Q(x_1, x_2)$ zijn maximum op M.

In dit voorbeeld is de verzameling

M niet leeg
begrensd
convex.

Zij $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ een vector in R_n.

<u>Def.</u> 1.1. $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^k$ zijn vectoren in R_n. Een vector $\underline{x}$ in R_n heet een <u>convexe</u> <u>combinatie</u> van $\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^k$, indien er niet-negatieve getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ bestaan zodanig dat

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{x}^i \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Zijn alle $\alpha_i > 0$ dan is $\underline{x}$ een <u>echte</u> conv. comb. van $\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^k$.

Def. 1.2. Een verzameling K van vectoren heet convex, indien iedere convexe combi- natie van vectoren behorend tot K tot K behoort.

Def. 1.3. Een vector $\underline{x} \in K$ heet hoekpunt van K indien $\underline{x}$ niet te schrijven is als echte conv. comb. van twee vectoren behorend tot K.

2. De algemene formulering.

Er zijn q producten te fabriceren
in hoeveelheden $x_1, \ldots, x_q$

met opbrengst $p_1, \ldots, p_q$
per eenheid.

Er zijn m productie middelen met
capaciteit $b_1, \ldots, b_m$

a_{ij} is benodigde capaciteit van
productie middel i voor fabricage
van één eenheid product type j
$i = 1, \ldots m$; $j = 1, \ldots, q$

Totale opbrengst

(2.1) $$Q = x_1 p_1 + \cdots + x_q p_q$$

Nevencondities

(2.2)
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1q} x_q \leq b_1$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mq} x_q \leq b_m$$

Tekencondities

(2.3) $$x_1 \geq 0, \ \ldots \ , x_q \geq 0$$

Zij

(2.4) $$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_q \end{pmatrix}, \quad \underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \cdots \\ p_q \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1q} \\ & \\ a_{m1} & a_{mq} \end{pmatrix}$$

Probleem:

Bepaal $\underline{x}$ zodanig dat

(2.5) $Q(\underline{x}) \overset{\text{def}}{=} \underline{p}^T \underline{x}$ maximaal is

en

(2.6) $A\,\underline{x} \leq \underline{b}$

(2.7) $\underline{x} \geq \underline{0}$

Opm. 1

De neven condities zijn lineaire ongelijkheden.
De te optimaliseren functie is een lineaire.

Generalisatie: niet-lineaire neven voorw.
" - " nuts functie.
(niet-lineaire progr.)

Vragen

1. Wanneer heeft stelsel een oplossing?
2. Wanneer is deze eenduidig bepaald?
3. Hoe de oplossing te vinden?
(constructie van algorithme)

Opm 2.

Dikwijls zijn A en $\underline{b}$ niet nauwkeurig bekend.
Hoe gevoelig is de oplossing (zo deze er is) voor kleine variaties in A en $\underline{b}$?
Algemeen: A en $\underline{b}$ beide functies van een parameter t;

$$A = A(t), \quad \underline{b} = \underline{b}(t), \quad t_1 < t < t_2$$

(parameter program.)

<u>Opm. 3</u>, A, $\underline{b}$ en $\underline{p}$ kunnen stochastische variabelen zijn.

(Stochastische Progr.)

Literatuur [1],...,[7].

Zij

(2.8) $$\underline{y} \overset{def}{=} \underline{b} - A\underline{x} \quad , \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} \geq 0$$

dan stelt y_i voor het deel van de beschikbare capaciteit b_i dat niet gebruikt wordt.

$\underline{y}$ heet wel de <u>spelings</u> of <u>sluik</u> vector

Zij

(2.9) $$\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_q \\ y_1 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad \hat{\underline{p}} = \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \cdots \\ p_q \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\underline{b}} = \underline{b}$$

$(\hat{\underline{p}} \in R_{q+m})$.

(2.10) $$\hat{A} = [A, I_m] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1q} & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ a_{m1} & a_{mq} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{q} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{m}$$

dan gaat (2.5),...,(2.7) over in

(2.11) $$Q(\hat{\underline{x}}) = \hat{\underline{p}}^T \hat{\underline{x}} \quad \text{maximaal}$$

(2.12) $$\hat{A}\,\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{b}}$$

(2.13) $$\hat{\underline{x}} \geq 0$$

en stelsels (2.11), ..., (2.13) zijn equivalent.
(2.5), ..., (2.7)
immers y_i kon direct geëlimineerd worden.

Voorbeeld.

In 7 suikerfabrieken $F_1, \ldots, F_7$
per maand $a_1, \ldots, a_7$ ton suiker geproduceerd.

In 300 plaatsen $G_1, \ldots, G_{300}$
per maand $z_1, \ldots, z_{300}$ ton suiker verbruikt.

c_{jk} transportkosten per ton van $F_j \to G_k$

x_{jk} te verzenden aantallen ton suiker van $F_j \to G_k$

Bepaal x_{jk} zodanig dat $\sum_{j=1}^{7} a_j = \sum_{k=1}^{300} z_k$

en

$$Q \overset{\text{def}}{=} \sum_j \sum_k c_{jk} x_{jk} \quad \text{minimaal}$$

Dus

$$Q \equiv \sum_j \sum_k c_{jk} x_{jk} \quad \text{minimaal}$$

$$\sum_{j=1}^{7} x_{jk} = z_k, \quad k = 1, \ldots, 300$$

$$\sum_{k=1}^{300} x_{jk} = a_j \quad j = 1, \ldots, 7$$

$$\sum_{j=1}^{7} a_j = \sum_{k=1}^{300} z_k$$

(nevencondities)

$x_{jk} \geq 0$, $j = 1, \ldots, 7$; $k = 1, \ldots, 300$ — tekencondities

Opm 4. De oplossing van dit probleem gaf enorme besparing t.o.v. oorspronkelijke routine (zie Collatz)

We onderzoeken nu het systeem

(2.14) $Q(\underline{x}) = \underline{p}^T \underline{x}$ minimaal, $\underline{p}, \underline{x} \in R_n$

(2.15) $A\underline{x} = \underline{b}$ $\underline{b} \in R_m$

(2.16) $\underline{x} \geq \underline{0}$

met

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

en

(2.17) $m < n$

<u>Opm.</u> 5. Het geval $m \geq n$ is voor ons niet interessant; dit geval uitgebreid behandeld bij theorie v. lineaire verg.

Een $\underline{x}$ die aan (2.15) en (2.16) voldoet wordt een <u>toelaatbare</u> (<u>feasible</u>) vector genoemd.

(2.18) $\Omega \stackrel{def}{=} \{\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0\}$.

Volgt:

Ω is een convexe verzameling,

Bewijs: volgt uit def. 1.2 (blz. 4).

Zij $\underline{a}^k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \cdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ de k^e kolom vector van A.

zodat

(2.19) $\sum_{k=1}^{n} \underline{a}^k x_k = \underline{b}$

<u>Stelling 2.1</u> $\underline{x} \in M$ is een hoekpunt van M (zie def. 1.3, blz. 4) indien en alleen indien de vectoren in (2.19) behorende bij de positieve componenten van $\underline{x}$ een lineair onafhankelijk stelsel vormen.

<u>Bewijs</u>: Vanwege $\underline{x} \in M$, zijn z, $0 \le z \le n$, comp. van $\underline{x}$ positief, de overige zijn nul.

<u>Zij $\underline{x}$ hoekpunt van M</u>

Is $z = 0$ dan bijbehorende vecr. van kolom vectoren leeg, en dus zijn deze vectoren per. def. lin. onafh.

Zij $z > 0$, zonder algemeenheid te kort te doen mogen wij stellen $x_1 > 0, \ldots, x_z > 0$, $x_{z+1} = \cdots = x_n = 0$.

dus

$$\sum_{k=1}^{z} \underline{a}^k x_k = \underline{b}.$$

<u>Veronderstel</u> $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^z$ zijn lin. afh.,

dan bestaan getallen $d_1, \ldots, d_z$ niet alle $= 0$, zodanig dat

$$\sum_{k=1}^{z} \underline{a}^k d_k = \underline{0}.$$

Vanwege $x_k > 0$, $k = 1, \ldots, z$

zal voor voldoend kleine $\delta > 0$

ook $x_k \pm \delta d_k > 0$, $k = 1, \ldots, z$ zijn.

en er geldt

$$\sum_{k=1}^{z} \underline{a}^k (x_k \pm \delta d_k) = \underline{b}$$

Zij

$x_k^{(1)} \overset{def}{=} x_k + \delta d_k$ $\qquad$ $x_k^{(2)} \overset{def}{=} x_k - \delta d_k$, $k = 1, \ldots, z$

$= 0$ $\qquad$ $= 0$, $k = z+1, \ldots, n$

en

$$\underline{x}^{(1)} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ \cdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \underline{x}^{(2)} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ \cdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix},$$

dan eles $\underline{x}^{(1)}$ en $\underline{x}^{(2)} \in M$
dus ook

$$\underline{x} = \tfrac{1}{2}(\underline{x}^{(1)} + \underline{x}^{(2)}) \in M \quad \text{(convexiteit)}$$

$\underline{x}$ is dus een echte convexe comb. van twee vectoren van Ω (zie def. 1.1 blz. 3) en kan dus geen hoekpunt van Ω zijn.

Tegenspraak.

Derhalve: Is $\underline{x}$ hoekpunt van Ω dan zijn $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^r$ lin. onafh.

Vervolgens het omgekeerde.

Zij $x_k > 0$, $k = 1, \dots, r$,
$= 0$, $k = r+1, \dots, n$
en
$\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^r$ lin. onafh.

Veronderstel $\underline{x}$ is echte convexe combinatie van $\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)} \in \Omega$,
d.w.z.

(2.20) $$\underline{x} = \alpha\, \underline{x}^{(1)} + (1-\alpha)\underline{x}^{(2)}, \quad 1 > \alpha > 0.$$

Daar $\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)} \in M$ is $x_k^{(1)} \geq 0$, $x_k^{(2)} \geq 0$, $k = 1, \dots, n$
zodat vanwege (2.20)

(2.21) $$x_k^{(1)} = x_k^{(2)} = 0, \quad k = r+1, \dots, n$$

echter ook

$$A\underline{x}^{(1)} = \underline{b} \quad \text{en} \quad A\underline{x}^{(2)} = \underline{b} \quad (\text{omdat } \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)} \in M)$$

volgt

$$A(\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}) = \underline{0} \quad \text{d.w.z. vgl. (2.21)}$$

$$\sum_{k=1}^{r} \underline{a}^k (x_k^{(1)} - x_k^{(2)}) = \underline{0}$$

het geen een tegenspraak is, daar $\underline{a}^{1}, \ldots, \underline{a}^{r}$ lin. onafh. zijn. Zodat veronderstelling onjuist, derhalve

$\underline{x}$ is hoekpunt van M. w.t.b.w.

<u>Gevolg</u> 2.1 Een hoekpunt $\underline{x}$ van M heeft hoogstens m positieve componenten.

<u>Def.</u> 2.1 Een hoekpunt $\underline{x}$ van M heet <u>ontaard</u> als $\underline{x}$ minder dan m positieve componenten heeft.

<u>Stelling</u> 2.2. M heeft hoogstens eindig veel hoekpunten.

<u>Bewijs</u> Aantal deelverz. van lin. onafh. kolom vectoren van A is eindig, en ieder lin. onafh. stelsel bepaalt eenduidig een hoekpunt.

<u>Stelling</u> 2.3. Is M niet leeg, dan is ook de verzameling van hoekpunten van M niet leeg.

<u>Bewijs</u> Zij $\underline{x} \in M$
en $p(\underline{x})$ aantal van nul verschillende componenten van $\underline{x}$.

Kennelijk

$$0 \leq p(\underline{x}) \leq n$$

Indien M niet leeg dan bereikt $p(\underline{x})$ op M zijn minimum p_0. en zij

$$p(\bar{\underline{x}}) = p_0 \quad , \quad \bar{\underline{x}} \in M.$$

Is $p_0 = 0$ dan dus $\bar{\underline{x}} = \underline{0}$, en de bij deze $\bar{\underline{x}}$ behorende verz. van kolomvectoren met pos. x_k in (2.19)

is leeg, derhalve een verz. van lin. onafh. vectoren zodat $\bar{x}$ hoekpunt is van M (Stelling 2.1 blz. 10)

Zij $p_0 > 0$, zodat gesteld kan worden

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{p_0}, 0, \ldots 0)^T$$

Veronderstel $\bar{x}$ is geen hoekpunt
dan $a^1, \ldots, a^{p_0}$ lin. afh.
en dus bestaan getallen d_k zo dat
$\sum_{k=1}^{p_0} a^k d_k = 0$, met niet alle $d_k = 0$

Zoek onder de $d_k \neq 0$ die d_k waarvoor $\frac{\bar{x}_k}{|d_k|}$ minimaal is.

Zij dit d_1 (die we positief mogen veronderstellen)

en $\lambda \overset{def}{=} \frac{\bar{x}_1}{|d_1|} \leq \frac{\bar{x}_k}{|d_k|}$, $k = 2, \ldots, p_0$

$$\hat{x} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - \lambda d_1 \\ \cdots \\ \bar{x}_{p_0} - \lambda d_{p_0} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

en vanwege

$$A\hat{x} = A\bar{x} - \lambda \sum_{k=1}^{p_0} a^k d_k = b$$

en $\hat{x} \geq 0$

volgt $\hat{x} \in M$

echter heeft nu $\hat{x}$ zeker een nul comp. meer dan $\bar{x}$, dit is in tegenspraak met def. van p_0, derhalve $\bar{x}$ is hoekpunt van M w.t.b.w.

Mogelijkheden

i. M is leeg

de neven- en tekencondities zijn strijdig.

ii. M is niet-leeg en begrensde deelverz. van R_n

M heet nu een <u>convex polyeder</u>. Aangetoond wordt (zie St. 2.6, blz. 16) dat de continue functie $Q(\underline{x})$ op de begrensde en afgesloten verz. M zijn minimum aanneemt en wel in een hoekpunt van M.

iii. M is een onbegrensde deelverz. van R_n

Twee gevallen te onderscheiden

a) $Q(\underline{x})$ is op M naar onderen begrensd, en neemt dan zijn minimum aan op M (zie St. 4.8. blz. 46).

b) $Q(\underline{x})$ is op M niet naar onderen begrensd, het L.P. probleem heeft geen opl. (zie St. 3.2, blz. 26).

<u>Def.</u> 2.2. Een punt $\underline{x}^0 \in M$ heet een <u>minimaal punt</u> als $Q(\underline{x}^0) \leq Q(\underline{x})$ voor alle $\underline{x} \in M$.

<u>Stelling</u> 2.4. De verzameling van de minimaal punten van M is convex.

<u>Bewijs</u>: triviaal

<u>Stelling</u> 2.5 Is M een convex polyeder (zie blz. 14) dan kan ieder $\underline{x} \in M$ als een convexe combinatie van hoekpunten van M geschreven worden.

<u>Bewijs</u> Zij $\underline{x} \in M$ dan $\sum_{k=1}^{n} \underline{a}^k x_k = \underline{b}$

$x_k \geq 0, \; k = 1, \ldots, n.$

Zij z aantal positieve x_k.
Is $z = 0$ dan is $\underline{x}$ hoekpunt (St. 2.1, blz. 10) en stelling is bewezen.

Zij $z > 0$ en veronderstel stelling bewezen voor $0, 1, \ldots, z-1$.

Zij $Z \overset{def}{=} \{k : x_k > 0\}$.

Zijn $\underline{a}^k$ voor $k \in Z$ lin. onafh. dan $\underline{x}$ hoekpunt van M en stelling is bewezen.

Veronderstel $\underline{a}^k$, $k \in Z$ lin. afh. dan bestaan d_k, $k \in Z$ niet alle $= 0$ zo dat

$$\sum_{k \in Z} \underline{a}^k d_k = \underline{0}.$$

Zij $\underline{x}(\lambda)$ vector met comp. $x_k + \lambda d_k$, $k \in Z$
0, $k \notin Z$

Daar M, begrensd, afgesloten en convex is bestaan een $\lambda_1 < 0$ en een $\lambda_2 > 0$ zodanig dat

$\underline{x}(\lambda) \in M$ voor $\lambda \in [\lambda_1 ; \lambda_2]$,
$\notin$,, $\notin$,

immers $\sum_{k \in Z} \underline{a}^k x_k = 0$
en λ_1, λ_2 bepaald door $x_k(\lambda) \geq 0$, $k \in Z$.
Volgt $x_k(\lambda_1) = 0$ voor minstens een $k \in Z$,
$x_k(\lambda_2) = 0$,, ,, ,, $k \in Z$.

$\underline{x}(\lambda_1)$ en $\underline{x}(\lambda_2)$ hebben een positieve comp. minder dan $\underline{x}$, en daar $\underline{x}$ convexe comb. is van $\underline{x}(\lambda_1)$ en $\underline{x}(\lambda_2)$ (immers $\underline{x}$ ligt tussen $\underline{x}(\lambda_1)$ en $\underline{x}(\lambda_2)$) en deze beide convexe comb. zijn van hoekpunten van M (inductieveronderstelling) is de stelling bewezen.

<u>Stelling</u> 2.6 Is M een convex polyeder dan neemt $Q(\underline{x})$ zijn minimum aan in minstens één hoekpunt van M.

<u>Bewijs</u> $Q(\underline{x})$ is continu op de begrensde, afgesloten verz. M, en neemt dus in een punt $\underline{x}^0 \in M$ zijn minimum waarde aan. Vanwege stelling 2.5 kunnen we stellen

$$\underline{x}^0 = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \underline{x}^j \quad \text{met} \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$$

waarin $\underline{x}^k$, $k=1,\ldots,p$ de hoekpunten van M zijn, $p < \infty$, zie stelling 2.2, blz. 12.

$Q(\underline{x})$ is lineair in $\underline{x}$, dus $Q(\underline{x}^0) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j Q(\underline{x}^j)$

Echter ook $\qquad Q(\underline{x}^0) \leq Q(\underline{x}^j), \; j=1,\ldots,p.$

Er is minstens een $\alpha_k > 0$ zou voor deze k

$$Q(\underline{x}^0) < Q(\underline{x}^k)$$

dan volgt voorgaande ongelijkheid

$$Q(\underline{x}^0) < \sum_{j=1}^{p} \alpha_j Q(\underline{x}^j),$$

hetgeen i.v.m. laatste gelijkheid niet kan, derhalve $Q(\underline{x}^k) = Q(\underline{x}^0)$, zodat hoekpunt $\underline{x}^k$ een minimaal punt is.

(W.t.b.w.)

Stelling 2.7 Is M niet begrensd en neemt $\mathcal{C}(\underline{x})$ op M zijn minimum aan, dan is minstens één hoekpunt van M minimaal punt.

Bewijs: Zie Collatz, blz. 12.

Vanaf nu verondersteld

(2.22) rang van $A = m$ = aantal rijen van A.

Veronderstelling is niet beperkend.
immers is rang van $A < m$
dan $A\underline{x} = \underline{b}$ niet oplosbaar
of enige van de verg. zijn lin. afh. van de overige en deze kunnen weggelaten worden, het resulterende stelsel heeft dan weer rang = aantal rijen.

Zij $\underline{x}$ hoekpunt van M, zodat $\underline{x}$ hoogstens m pos. comp. heeft (zie gevolg 2.1, blz. 12)

Zij

(2.23) $Z' \overset{def}{=} \{ K : x_K > 0 \}$

zodat $x_K = 0$ voor $K \notin Z'$.

en zie (2.19) en Stelling (2.1)

(2.24) $\{\underline{a}^K, K \in Z'\}$ is lin. onafh. stelsel.

<u>Stelling</u> 2.8 Aan een hoekpunt $\underline{x} \in M$ kunnen m lin. onafh. kolomvectoren $\underline{a}^K$, $K \in Z$ van A toegevoegd worden en wel zo, dat hierbij de vectoren $\underline{a}^K$, $K \in Z'$ gebruikt worden, zodat $Z' \subset Z$.

<u>Bewijs</u>: Is $\underline{x}$ een niet-ontaard hoekpunt (zie def. 2.1 blz. 12) dan volgt bewering uit Stelling 2.1 blz. 10, en is $Z' = Z$.

Is $\underline{x}$ ontaard dan zijn er $r < m$ lin. onafh. kolomvectoren a^K, $K \in Z'$, deze kunnen m.b.v. $m-r$ overige kolomvectoren van A tot een stelsel van m lineair onafh. vectoren, aange-

vuld worden, immers rang van A is = m. (w.t.b.w.)

<u>Def</u>. 2.3. Een stelsel lin. onafh. kolom vectoren van A, toegevoegd aan een hoekpunt van M heet een <u>basis</u> voor dit hoekpunt.

<u>Opm</u>. 6. Voor niet-ontaard hoekpunt is basis eenduidig bepaald.

<u>Opm</u>. 7. Is M een polyeder, dan is het L.P. probleem op te lossen door allereerst alle lin. onafh. stelsels van m kolomvectoren van A te bepalen.

Voor ieder van deze stelsels lost men op

$$\sum_{\kappa \in Z} \underline{a}^{\kappa} t_{\kappa} = \underline{b}.$$

van al deze oplossingen worden alleen, die aangehouden, waarvoor alle t_{κ} niet-negatief zijn.
De zo overblijvende oplossingen bepalen de hoekpunten van M,

$$x_{\kappa} = t_{\kappa}, \quad \kappa \in Z$$
$$= 0, \quad \kappa \notin Z.$$

Voor deze hoekpunten wordt nu $Q(\underline{x})$ bepaald, de kleinsten van deze waarden leveren dan de minimaal (hoek)punten.

Hiermee is in feite voor het geval dat M een polyeder is, het L.P. probleem opgelost.
In de praktijk is deze methode voor grote n en m <u>niet</u> bruikbaar.

We moeten trachten een algorithme te vinden die in zo weinig mogelijk stappen tot een

minimaal hoekpunt voert.

Uit het voorgaande is het duidelijk dat we slechts onder de hoekpunten behoeven te zoeken.

Start dus in een hoekpunt, ga naar een nabij gelegen hoekpunt en wel zodanig dat $Q(\underline{x})$ zo veel mogelijk afneemt.
Op dit idee moeten we de algorithme baseren.

3. De Simplex methode.

(3.1) $\varphi(\underline{x}) = \underline{p}^T \underline{x}$ minimaal

$\underline{p}, \underline{x} \in R_n$

(3.2) $A\,\underline{x} = \underline{b}$ $\qquad \underline{b} \in R_m$

(3.3) $\underline{x} \geq 0$

(3.4) A heeft m rijen, n kolommen, $m < n$
,, rang $= m$

$\underline{x}^0 \in M$, d.i. verz. van toelaatbare vectoren
$\underline{x}^0$ zal een hoekpunt voorstellen.

(3.5) $\underline{a}^k$, $k \in Z$ de lin. onafh. vectoren behorend by hoekpunt $\underline{x}^0$ (zie St. 2.8. blz. 18) d.i. de basis van $\underline{x}^0$.
$x_k^0 = 0$ voor $k \notin Z$, Z bevat m elementen,

$$\sum_{k \in Z} \underline{a}_k x_k^0 = \underline{b}$$

Vanwege $\underline{a}_k$, $k \in Z$, en deze lin. onafh. kan iedere kolomvector $\underline{a}^i$, $i = 1, \ldots, n$ van A geschreven worden als

(3.6) $$\underline{a}^i = \sum_{k \in Z} \underline{a}^k c_{ki}, \quad i = 1, \ldots, n$$

met $c_{ki} = \delta_{ki}$ voor $i \in Z$ (Kronecker Symb.)

Veronderstel nu dat $\underline{x}^0$ een niet-ontaard hoekpunt is.

dus $x_k^0 > 0$ voor alle $k \in Z$.

We gaan nu een nieuw hoekpunt $\underline{x}^1$ bepalen, zodanig dat de bijbehorende basis dezelfde kolom vectoren bevat als $\underline{x}^0$ op één na, en dit is mogelijk als er onder de c_{ki} in (3.6) voor $k \in Z$, $i \notin Z$ minstens één positief is,

zij dit $c_{\hat{k}j}$.

(3.7) Voor $\delta \geq 0$ zij nu $\underline{x}(\delta)$ vector met
$$x_k(\delta) = x_k^0 - \delta c_{kj},\quad k \in Z$$
$$x_j(\delta) = \delta$$
$$x_i(\delta) = 0 \quad i \notin Z, i \neq j$$

Uit (3.5) en (3.6) volgt

(3.8) $$A\underline{x}(\delta) = \sum_{k \in Z} (x_k^0 - \delta c_{kj})\underline{a}^k + \delta \underline{a}^j = \sum_{k \in Z} x_k^0 \underline{a}^k = \underline{b}$$

Alle comp. van $\underline{x}(\delta)$ zijn niet-negatief voor $0 \leq \delta \leq \delta_1$

als

(3.9) $$\delta_1 = \min_{k \in Z''} \frac{x_k^0}{c_{kj}}$$

waarin Z'' verz. van al die $k \in Z$ $(j \notin Z)$ waarvoor $c_{kj} > 0$; omdat $c_{\hat{k}j} > 0$ is Z'' niet leeg, en $0 < \delta_1 < \infty$.

$\underline{x}(\delta) \in M$ voor $0 \leq \delta \leq \delta_1$ zie boven.

We tonen aan dat

$$\underline{x}^1 \overset{\text{def}}{=} \underline{x}(\delta_1) \text{ hoekpunt is van } M$$

en dat $\underline{a}^k, k \in Z, k \neq l$, en $\underline{a}^j$ de basis van $\underline{x}^1$ is, hierin l die index van Z'' waarvoor in (3.9) het minimum aangenomen wordt.

$\underline{x}^1 \in M$ en heeft hoogstens m pos. comp. want (3.7)
$$x_i^1 = 0,\ i \notin Z,\ i \neq j \quad \text{en} \quad x_l^1 = 0.$$

Veronderstel $\underline{a}^k, k\in Z, k\neq l$ en $\underline{a}^j$ lin. afh.

dan bestaan $d_k, k\in Z, k\neq l$ en d_j zodanig dat

$$\sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq l}} \underline{a}^k d_k + d_j \underline{a}^j = \underline{0}\,, \qquad \text{met niet alle } d\text{'s} = 0$$

Nu $d_j \neq 0$, anders zouden $\underline{a}^k, k\in Z, k\neq l$ lin. afh. zijn.

We mogen dus $d_j = 1$ kiezen en vanwege (3.6)

$$\underline{0} = \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq l}} d_k \underline{a}^k + \underline{a}^j = c_{lj}\underline{a}^j + \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq l}} (d_k + c_{kj})\underline{a}^k,$$

daar nu $\underline{a}^k, k\in Z$ lin. onafh. moet $c_{lj} = 0$ zijn, hetgeen een tegenspraak is daar l die index is waarvoor in (3.9) het minimum bereikt wordt.

Derhalve $\underline{a}^k, k\in Z, k\neq l$ en $\underline{a}^j$ een lin. onafh. stelsel en uit (3.8) en stelling 2.1 blz. 10 volgt nu dat $\underline{x}^1$ hoekpunt is met laatstgenoemd stelsel als basis.

De indexverz. Z' van $\underline{x}'$ ontstaat uit die van $\underline{x}^0$ door in Z l weg te laten en j toe te voegen.

We hebben (3.6)
$$\underline{a}^i = \sum_{k\in Z} \underline{a}^k c_{ki}$$
en nu
$$\underline{a}^i = \sum_{k\in Z'} \underline{a}^k c'_{ki}$$

Wat zijn de relaties tussen c'_{ki} en c_{ki} ?

Voor $i = j$ vanwege $c_{lj} > 0$
$$\underline{a}^l = \frac{1}{c_{lj}}\Big(\underline{a}^j - \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq l}} c_{kj}\underline{a}^k\Big)$$

dus

$$\underline{a}^i = \frac{c_{li}}{c_{lj}}\underline{a}^j + \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq l}} \Big(c_{ki} - \frac{c_{li}\,c_{kj}}{c_{lj}}\Big)\underline{a}^k$$

Derhalve

(3.10) $$c'_{jl} = \frac{1}{c_{lj}} \qquad c'_{kl} = -\frac{c_{kj}}{c_{lj}}, \quad k \in Z,\ k \neq l,$$

$$\left.\begin{array}{l} c'_{ji} = \dfrac{c_{li}}{c_{lj}} \\[2ex] c'_{ki} = c_{ki} - \dfrac{c_{li}\,c_{kj}}{c_{lj}} \quad (k \in Z,\ k \neq l). \end{array}\right\} \ i \neq l$$

Bovenstaande procedure werkt ook als x^0 ontaard hoekpunt is (zie Collatz), het kan echter zijn dat $\delta_1 = 0$ wordt, vindt dan geen nieuw hoekpunt maar een andere basis bij x^0.

<u>Voorbeeld</u>

$$\begin{array}{cccccc} \underset{\downarrow}{a^1} & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & \underset{\downarrow}{a^6} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Zij $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $Z = (4, 5, 6)$ zodat a^4, a^5, a^6 basis van x^0.

Nu bevat 2^e^ kolom van A pos. comp.

Kies dus $j = 2$

$$\Rightarrow \quad \delta_1 = \min\left(\frac{9}{4}, \frac{4}{2}\right) = 2 \xrightarrow{(3.9)} l = 5$$

$\rightarrow$ $Z' = (4, 2, 6)$ en $x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 9-2\cdot4 \\ 4-2\cdot2 \\ 5-2\cdot-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ nieuw hoekpunt met basis a^2, a^4, a^6

(Form (3.7))

Boven is beschreven hoe we vanuit een hoekpunt van Ω een ander hoekpunt kunnen bereiken.

Er is hierbij nog veel keuze mogelijk. Deze nu in te perken door op $Q(\underline{x})$ te letten en te zorgen dat deze zo snel mogelijk zakt.

(3.11) $$Q^0 \overset{\text{def}}{=} Q(\underline{x}^0) = \underline{p}^T \underline{x}^0 = \sum_{k\in Z} p_k x_k^0$$

$$t_i \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\in Z} c_{ki} p_k , \qquad \underline{a}^i = \sum_{k\in Z} \underline{a}^k c_{ki} \quad , i=1,\dots,n$$

Nu is voor $\underline{x}\in\Omega$

$$\sum_{i=1}^n \underline{a}^i x_i = \underline{b} \quad \text{en} \quad \underline{x}\geq\underline{0},$$

zodat uit

$$\sum_{k\in Z} \underline{a}^k x_k^0 = \underline{b} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k\in Z}\underline{a}^k c_{ki} = \sum_{k\in Z}\underline{a}^k \sum_{i=1}^n c_{ki}x_i$$

en de lin. onafh. van $\underline{a}^k, k\in Z$ volgt

$$x_k^0 = \sum_{i=1}^n c_{ki}x_i \quad , \quad k\in Z$$

en dus vanwege $c_{ki}=\delta_{ki}$, $k,i\in Z$,

(3.12) $$x_k = x_k^0 - \sum_{i\notin Z} c_{ki}x_i \quad , \quad k\in Z.$$

Nu uit (3.11) en (3.12)

$$Q(x) = \sum_{k\in Z} p_k x_k + \sum_{i\notin Z} p_i x_i$$

$$= \sum_{k\in Z} p_k x_k^0 + \sum_{i\notin Z}\left(p_i - \sum_{k\in Z} p_k c_{ki}\right) x_i$$

dus

(3.13) $$Q(x) = Q^0 - \sum_{i\notin Z}(t_i - p_i)x_i$$

Stelling 3.1. $\underline{x}^0$ zij niet-ontaard hoekpunt (zie def. 2.1 blz. 12). Bestaat er een indicespaar $\hat{k} \in Z$, $j \notin Z$ met $t_j > p_j$ en $c_{\hat{k}j} > 0$, dan geeft voorgaand procédé ter bepaling nieuw hoekpunt een hoekpunt $\underline{x}'$ met $Q(\underline{x}') < Q^0 \equiv Q(\underline{x}^0)$.

Bewijs. In hoekpunt $\underline{x}'$ is $x_i' = 0$ voor $i \notin Z$, $i \neq j$
en $x_j' = \delta_1 > 0$ {(3.7) & (3.9)}

dus

$$Q(\underline{x}') = Q^0 - \delta_1 (t_j - p_j) < Q^0 \quad (\text{veronds. } t_j > p_j)$$

Stelling 3.2 $\underline{x}^0$ zij hoekpunt (al dan niet-ontaard) Bestaat er een $j \notin Z$ met $t_j > p_j$ en $c_{kj} \leq 0$ voor alle $k \in Z$, dan heeft het optimaliseringsprobleem geen oplossing.

Bewijs De vector $\underline{x}(\delta)$ (zie (3.7)) $\in \Omega$ voor alle $\delta \geq 0$ en uit (3.13)

$$Q(\underline{x}(\delta)) = Q^0 - \delta(t_j - p_j),$$

$Q(\underline{x})$ is dus op Ω niet naar onderen begrensd, er is dus geen oplossing. w.t.b.w

Opm 1. In het geval van St. 3.1 bereiken we bij toenemende δ en wel voor δ_1 een nieuw hoekpunt, in geval St. 3.2 wordt voor geen enkele eindige δ een nieuw hoekpunt bereikt.

Veronderstel eens Ω heeft uitsluitend niet-ontaarde hoekpunten.

Zij $\underline{x}^0$ hoekpunt, herhaalde toepassing van St. 3.1 geeft nieuwe hoekpunten

$$\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots \quad \text{met } Q(\underline{x}^0) > Q(\underline{x}^1) > Q(\underline{x}^2) > \ldots$$

Nu heeft Ω eindig veel hoekpunten (zie St. 2.2, blz. 12) zodat proces na eindig aantal stappen eindigt (er kan wel eens 2x zelfde hoekpunt bereikt worden, dan andere weg inslaan bij zo'n herhaling), er treden nu twee gevallen op:

i. Er is een index $j \notin Z$ met $t_j > p_j$ en $c_{kj} \leq 0$ voor alle $k \in Z$, dan is er geen opl. (St. 3.2 blz. 26)

ii. Er geldt $t_j \leq p_j$, alle $j \notin Z$, dan is probleem opgelost, vanwege

<u>Stelling</u> 3.3. Is voor een hoekpunt $\underline{x}^0$ (al dan niet ontaard) $t_j \leq p_j$ voor alle $j \notin Z$ dan is $\underline{x}^0$ een minimaal punt.

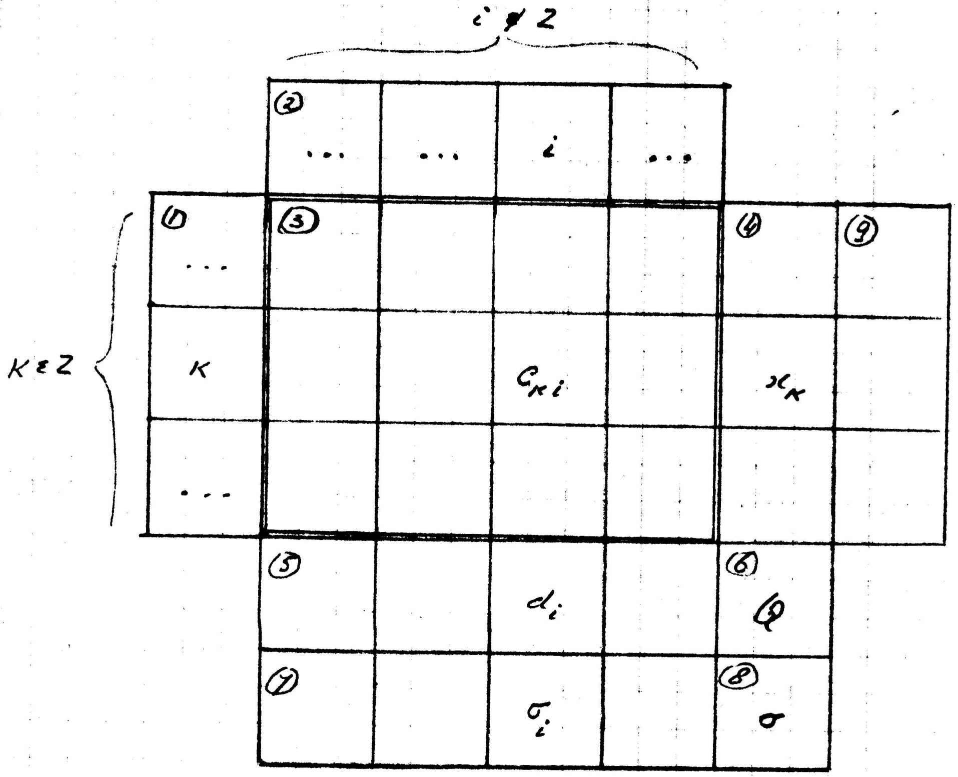
<u>Bewijs</u> Zij $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \Omega$, vanwege $\underline{x} \geq \underline{0}$ volgt uit (3.13).

$$Q(x) = Q^0 - \sum_{j \notin Z} (t_j - p_j) x_j \geq Q^0.$$

(w.t.b.w.)

<u>Opm.</u> 2. In geval van ontaarde hoekpunten is het mogelijk dat we bij constructie van volgende hoekpunten een cyclus doorlopen, d.w.z. terugkeren naar een zelfde hoekpunt. In de praktijk schijnt dit nog nooit voorgekomen te zijn. We zullen hier aan deze mogelijkheid verder geen aandacht besteden (zie Collatz & Wetterling, blz. 20).

Reken schema



Algemene schema voor

$$Q(\underline{x}) = \underline{p}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\underline{p}, \underline{x} \in R_n$$

$$\underline{b} \in R_m$$

$$Q(\underline{x}) \ \min$$

veld 1. indices $k \in Z$

2 ,, $i \notin Z$

3 c_{ki} $k \in Z, i \notin Z$ $\underline{a}^i = \sum_{k \in Z} c_{ki}\, \underline{a}^k$

4 x_k $k \in Z$ (3.7)

5 $d_i \stackrel{def}{=} t_i - p_i = \sum_{k \in Z} p_k c_{ki} - p_i$ $i \notin Z$ (3.11)

6 $Q(\underline{x})$

7 $\sigma_i \stackrel{def}{=} 1 - \sum_{k \in Z} c_{ki} - d_i$, $i \notin Z$

8 $\sigma \stackrel{def}{=} 1 - \sum_{k \in Z} x_k - Q$

9 x_k / c_{kj} ter bepaling δ (3.9)

Reken schema voor $Q(\underline{x}) = -\underline{p}^T \underline{x}$, $\underline{p}, \underline{x} \in R_q$

$A\underline{x} \leq \underline{b}$ $\qquad \underline{b} \in R_m$

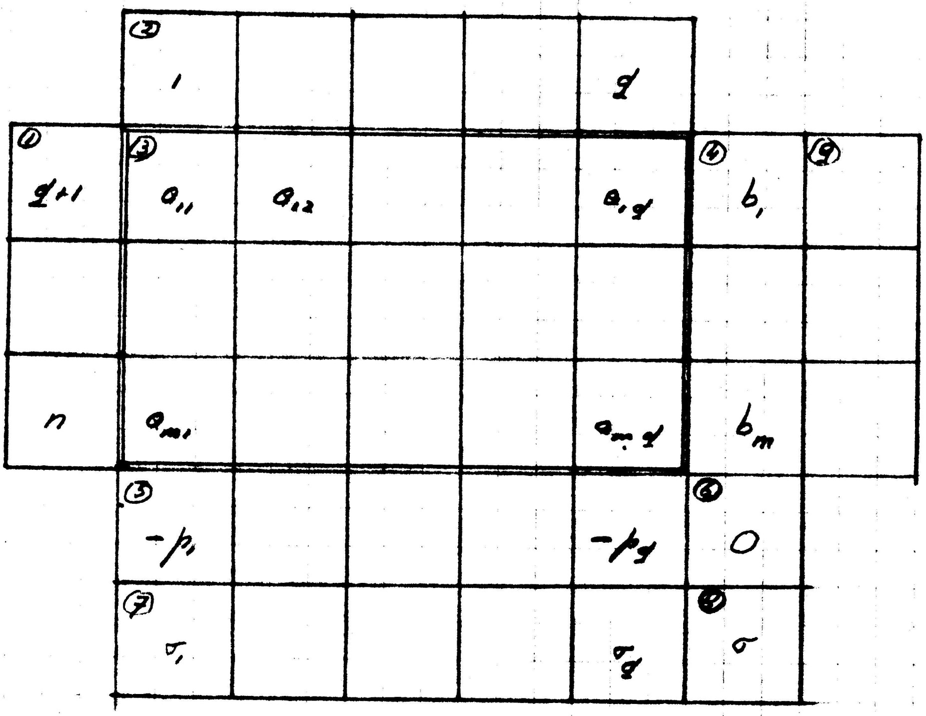
$\underline{x} \geq 0$

$q = n - m$

$Y_{q+1}, \ldots, Y_n$ de slack var.

$Q(\underline{x})$ min

$(-Q(\underline{x})$ max$)$



We starten met $\underline{x}^0 = [b_1, \ldots, b_m]^T$ met basis

$$\underline{a}^{q+1} = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \underline{a}^{q+2} = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \underline{a}^{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

Zodat in veld

1 $\quad q+1, \ldots, n$

2 $\quad 1, \ldots, q$

3 $\quad c_{ki} = a_{ki}$, $k \in Z,\ i \notin Z$

4 $\quad b_1, \ldots, b_m$

5 $\quad -p_1, \ldots, -p_q$ want $d_i = \sum_{k \in Z} c_{ki} p_k - p_i, \quad i \notin Z$

$\qquad = -p_i , \quad i \notin Z$ omdat $p_k = 0, \quad k \in Z$

6 $\quad Q(\underline{x}^0) = 0$

De Iteratie stap

(→ * ← scharnier kolom; * scharnier rij)

		i		j			
k		c_{ki}		c_{kj}		x_k	$\frac{x_k}{c_{kj}}$
l		c_{li}		c_{lj}		x_l	$\frac{x_l}{c_{lj}}$
		d_i		d_j		φ	
		σ_i		σ_j		σ	

oude schema

I. Bepaling v/h scharnier

1) zoek een $c_{lj} > 0$

2) bereken $\frac{x_k}{c_{kj}}$

3) zoek van deze de kleinste → l (zie 3.9)

↓ nu nieuwe schema invullen

		i		l		
k		$c_{ki} - \frac{c_{li} c_{kj}}{c_{lj}}$		$-\frac{c_{kj}}{c_{lj}}$		$x_k - x_l \frac{c_{kj}}{c_{lj}}$
j		$\frac{c_{li}}{c_{lj}}$		$\frac{1}{c_{lj}}$		$\frac{x_l}{c_{lj}}$
		$d_i - d_j \frac{c_{li}}{c_{lj}}$		$-\frac{d_j}{c_{lj}}$		$\varphi - x_l \frac{d_j}{c_{lj}}$
		$\sigma_i - \sigma_j \frac{c_{li}}{c_{lj}}$		$-\frac{\sigma_j}{c_{lj}}$		$\sigma - \frac{x_l \sigma_j}{c_{lj}}$

nieuwe schema

II. Invulling nieuwe schema

1. Ter plaatse scharnier $c_{lj} \rightarrow \frac{1}{c_{lj}}$
2. Alle overige elementen scharnier rij met $\frac{1}{c_{lj}}$ verm.
3. Alle overige elementen scharnier kolom met $-\frac{1}{c_{lj}}$ verm.
4. verder als in fig. zie opm. blz. 31
5. Controle: Alle kolom sommen = 1.

<u>Opm 3.</u> bij iteratie schema blz. 30

$$\delta_1 = \frac{x_l}{c_{lj}}$$

de nieuwe c_{ij} worden bepaald volgens (3.10), c_{ij}'

De " d_i " " " d_i'

$$d_i' = \sum_{k\in z'} c_{ki}' p_k - p_i = \sum_{\substack{k\in z\\ k\neq l}} \left(c_{ki} - \frac{c_{li}c_{kj}}{c_{lj}}\right) p_k + \frac{c_{li}}{c_{lj}} p_j - p_i$$

$$= \sum_{k\in z} c_{ki} p_k - c_{li} p_l - \frac{c_{li}}{c_{lj}} \sum_{k\in z} c_{kj} p_k + c_{li} p_l + \frac{c_{li}}{c_{lj}} p_j - p_i$$

$$= d_i - \frac{c_{li}}{c_{lj}} d_j \quad , \quad i \neq l$$

$$d_l' = \sum_{k\in z'} c_{kl}' p_k - p_l = - \sum_{\substack{k\in z\\ k\neq l}} \frac{c_{kj}}{c_{lj}} p_k + \frac{1}{c_{lj}} p_j - p_l$$

$$= - \sum_{k\in z} \frac{c_{kj}}{c_{lj}} p_k + \frac{1}{c_{lj}} p_j = - \frac{d_j}{c_{lj}}$$

analoog voor σ_i zie blz. 28.

<u>Opm. 4</u>

scharnierkolom ↓

x_k (s.k)

scharnierrij → (s.r) [s]

$$x_k' = x_k - \frac{(s.r) \times (s.k)}{s}$$

Voorbeeld van blz 1

$Q(x_1, x_2) = -250\,x_1 - 45\,x_2$ minimaal

$$x_1 \le 50 \qquad x_1 \ge 0$$
$$x_2 \le 200 \qquad x_2 \ge 0$$
$$x_1 + 0.2\,x_2 \le 72$$
$$150\,x_1 + 25\,x_2 \le 10.000$$

Voer in Y_3, Y_4, Y_5, Y_6
Start met schema blz. 29

schema 1.

	1 *	2		(9)
* 3	[1]	0	50	50
4	0	1	200	–
5	1	0.2	72	72
6	150	25	10.000	66.67
	250	45	0	
(7)	-401	-70,2	-10321	

1) Vul veld 7 in
2) $d_1 = 250 > 0 \Rightarrow j = 1$
3) vul veld 9 in
4) 50 min in veld 9 ⇒ $l = 1$

↓ nu nieuwe schema 2 invullen

schema 2.

	3	2 *		
1	1	0	50	–
4	0	1	200	200
5	-1	0.2	22	110
* 6	-150	[25]	2500	100
	-250	45	-12500	
	401	-70.2	9729	

5) wissel 1 en 3 in de index rij en kolom
6) vervang scharnier elem. door omgekeerde
7) werk scharnier kolom af hier verm. met -1
8) werk scharnier rij af hier verm. met 1
9) rest % tabel met regel opm. 4. blz. 31
10) Pas som regel ter controle toe.
11) Kolom 2 nieuwe schar. kolom
12) vul veld 9 in
13) hier 100ste kleinste dus 6 - scharnier rij

↓ nu naar schema 3.

schema 3

	*			
	3	6		
1	1	0	50	50
4	6	-0,04	100	16,67
* 5	0,2	-0.008	2	10
2	-6	0,04	100	-
	20	-1.8	-17000	
	-20.2	2.808	16749	

schema 4

		5	6	
x_1	1	-5	0.04	40
	4	-30	0.2	40
	3	5	-0.04	10
x_2	2	30	-0.2	160
		-100	-1	-17200
		101	2	16951

hier alle $c_j < 0$

zodat iteratie stopt en.

$x_1 = 40$ $Q = -17200$

$x_2 = 160$

dus 40 koeien
160 schapen

Voorbeeld

$$x_1 \leq 2 \qquad x_1 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \qquad x_2 \geq 0$$

$$3x_2 + 4x_3 \leq 6 \qquad x_3 \geq 0$$

$$Q = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \text{ maximaal}$$

Voer in slack var

$y_1 \geq 0$

$y_2 \geq 0$

$y_3 \geq 0$

		x_1	x_2	x_3 *		
	y_1	1	0	0	2	–
	y_2	1	1	2	4	2
×	y_3	0	3	[4]	6	1,5
		1	2	4	0	P_1
		-2	-5	-9	-11	

		x_1 *	x_2	y_3		
	y_1	1	0	0	2	2
*	y_2	1	[-1/2]	-1/2	1	1
	x_3	0	3/4	1/4	1½	–
		1	-1	-1	-6	P_4
		-2	7/4	9/4	5/2	

	y_2	x_2	y_3		
y_1	-1	1/2	1/2	1	
x_1	1	-1/2	-1/2	1	
x_3	0	3/4	1/4	1½	
	-1	-1/2	-1/2	-7	P_7
	2	3/4	5/4	9/2	

hier alle $d_i < 0$

en $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1\frac{1}{2}$

$-Q = -7 \rightarrow Q = 7$

Zelfde voorbeeld als blz. 34
starten echter met andere kolom

	x_1 *	x_2	x_3		
* y_1	[1]	0	0	2	2
y_2	1	1	2	4	4
y_3	0	3	4	6	–
	1	2	4	0	P_1
	-2	-5	-9	-11	

→

	y_1	x_2 *	x_3		
x_1	1	0	0	2	–
* y_2	-1	[1]	2	2	2
y_3	0	3	4	6	2
	-1	2	4	-2	P_2
	2	-5	-9	-7	

↓

	y_1 *	y_2	x_3		
x_1	1	0	0	2	2
x_2	-1	1	2	2	-2
* y_3	3	[-3]	-2	0	0
	1	-2	0	-6	P_5
	-3	5	1	3	

←

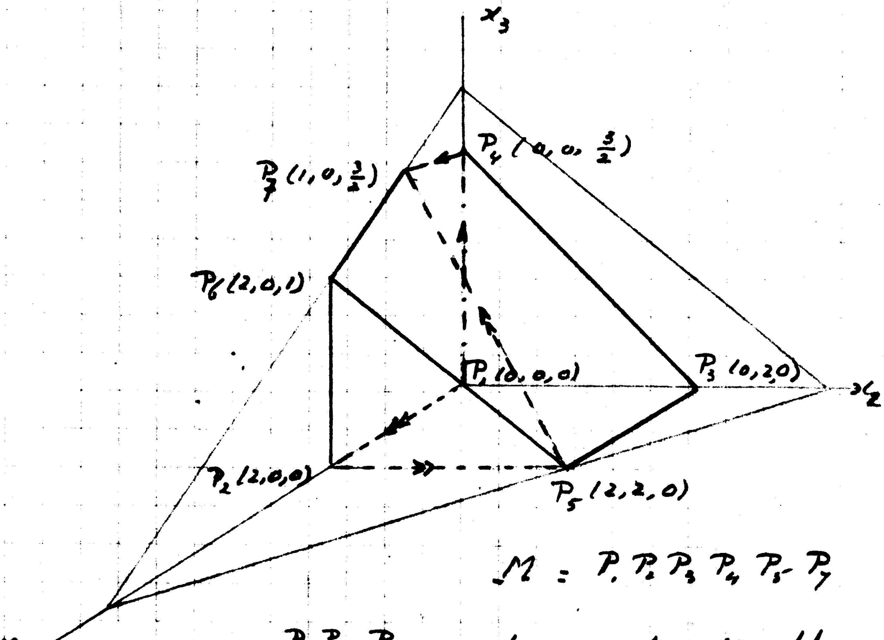
	y_3	y_2	x_3 *		
x_1	-1/3	1	2/3	2	3
* x_2	1/3	0	4/3	2	3/2
y_1	1/3	-1	-2/3	0	–
	-1/3	-1	2/3	-6	P_5
	1	2	-1	3	

we zijn weer in P_5.

↓

	y_3	y_2	x_2	
x_1	-1/2	1	-1/2	1
x_3	1/4	0	3/4	3/2
y_1	1/2	-1	1/2	1
	-1/2	-1	-1/2	-7 P_7
	5/4	2	3/4	9/2

alle $d_i \le 0$
$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1\tfrac{1}{2}$
$-Q = -7$



$M : P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_7$

$P_1 P_4 P_7$ volgens iteratie blz. 34

$P_1 P_2 P_5 P_7$ " " " 35

P_5 is ontaard hoekpunt

Met bespreking van deze zeven voorbeelden beëindigen we althans voorlopig, de bespreking van het Lin. Progr. Probleem. voor varianten en verfijningen van de numerieke procedure aangepast aan speciale type problemen zie Collatz-Wetterling.

4. Dualiteit. I.

Zij A $m \times n$ matrix m rijen, n kolommen

$\underline{b} \in R_m$

Stelling 4.1. Òf

(4.1) $$A\underline{x} = \underline{b}$$

heeft een oplossing $\underline{x} \in R_n$

òf

(4.2) $$A^T\underline{y} = \underline{0} \ . \ \underline{b}^T\underline{y} = 1$$

heeft een oplossing $\underline{y} \in R_m$.

Bewijs. 1) (4.1) en (4.2) bezitten niet gelijktijdig een oplossing, immers dan zou gelden

$$0 = \underline{x}^T A^T \underline{y} = (A\underline{x})^T \underline{y} = \underline{b}^T \underline{y} = 1,$$

tegenspraak.

2) Heeft (4.1) geen oplossing, dan heeft (4.2) een oplossing. Immers dan is $\underline{b}$ geen lin. comb. van de kolomvectoren van A.

zodat:

is r rang van A (en dus ook van A^T) dan heeft de

$(n+1) \times m$ matrix $\begin{bmatrix} A^T \\ \underline{b}^T \end{bmatrix}$ de rang $r+1$

Ook heeft nu de $(n+1) \times (m+1)$ matrix

$$\begin{bmatrix} A^T & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \underline{b}^T & 1 \end{bmatrix}$$

de rang $r+1$.

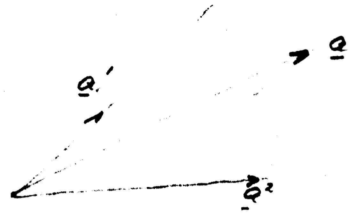
Omdat beide matrices de zelfde rang hebben volgt uit theorie lin. verg. dat (4.2) een oplossing heeft

(w.t.b.w.)

<u>Def. 4.1</u> Zij $\underline{a}^1, \dots \underline{a}^n \in R_n$. De verz.

(4.3) $$K(\underline{a}^1,\dots,\underline{a}^n) \overset{def}{=} \{\underline{a} : \underline{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{a}^i, \ \forall_{i=1}^{n}\, x_i \geq 0\}$$

heet de door $\underline{a}^1,\dots,\underline{a}^n$ gegenereerde <u>kegel</u>



<u>Stelling</u> 4.2 Of

(4.4) $$A\underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{x} \geq \underline{0}$$

heeft een opl. $\underline{x} \in R_n$

òf

(4.5) $$A^T\underline{y} \geq \underline{0}, \quad \underline{b}^T\underline{y} < 0$$

heeft een opl $\underline{y} \in R_m$.

<u>Bewijs</u> 1) (4.4) en (4.5) niet gelijktijdig oplosbaar, immers dan zou gelden

$$0 > \underline{b}^T\underline{y} = (A\underline{x})^T\underline{y} = \underline{x}^T A^T \underline{y} \geq 0, \quad \text{tegenspraak.}$$

2) Heeft $A\underline{x} = \underline{b}$ in 't geheel geen oplossing, dan uit St. 4.1, blz. 37 is er een $\hat{\underline{y}}$ met $A^T\hat{\underline{y}} = \underline{0}$, $\underline{b}^T\hat{\underline{y}} = 1$, zodat $\underline{y} = -\hat{\underline{y}}$ oplossing van (4.5) is.

3) Resteert nog te bewijzen: Is voor iedere oplossing $\underline{x}$ van $A\underline{x} = \underline{b}$ minstens een comp. negatief, dan is (4.5) oplosbaar.

Dit bewijs gevoerd via volledige inductie naar n, het aantal kolommen van A.

$n=1$ dus $\underline{a}^1 x_1 = \underline{b}$ met $x_1 < 0$

en dus $\underline{b} \neq \underline{0}$, daar anders

$\underline{x} = \underline{0}$ opl. is van (4.4)

Nu is $\underline{y} = -\underline{b}$ opl. van (4.5) immers

$$(\underline{a}^1)^T \underline{y} = -(\underline{a}^1)^T \underline{b} = -\alpha (\underline{a}^1)^T \underline{a}^1 \geq 0 \quad , \quad \underline{b}^T \underline{y} = -\underline{b}^T \underline{b} < 0 ,$$

zodat bewijs voor $n=1$ gereed.

Inductie stap van $n-1$ op n: Stelling geldt voor A met $n-1$ kolommen.

Nu aan te tonen dat voor n kolommen:
uit $\underline{b} \notin K(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n)$ volgt (4.5) heeft opl. $\underline{y} \in R_m$.

Uit $\underline{b} \notin K(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n) \Rightarrow \underline{b} \notin K(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^{n-1})$

en hieruit vanwege inductie veronderst. het bestaan van een $\underline{v} \in R_m$ met $(\underline{a}^i)^T \underline{v} \geq 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $\underline{b}^T \underline{v} < \underline{0}$.

Is nu ook $(\underline{a}^n)^T \underline{v} \geq 0$ kies dan $\underline{y} = \underline{v}$ en we hebben een opl. van (4.5).

Zij dus $(\underline{a}^n)^T \underline{v} < 0$, dan met

(4.6) $$\hat{\underline{a}}^i \overset{def}{=} ((\underline{a}^i)^T \underline{v})\, \underline{a}^n - ((\underline{a}^n)^T \underline{v})\, \underline{a}^i \quad , \quad \hat{\underline{b}} \overset{def}{=} (\underline{b}^T \underline{v})\, \underline{a}^n - ((\underline{a}^n)^T \underline{v})\, \underline{b}$$

is

i. $\hat{\underline{b}} \in K(\hat{\underline{a}}^1, \dots, \hat{\underline{a}}^{n-1})$

of

(4.7) ii. $\hat{\underline{b}} \notin K(\hat{\underline{a}}^1, \dots, \hat{\underline{a}}^{n-1})$

ad. i. Er bestaan $z_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n-1$ met $\sum_{i=1}^{n-1} \hat{\underline{a}}^i z_i = \hat{\underline{b}}$.
zodat

$$\underline{b} = \sum_{i=1}^{n-1} \underline{a}^i z_i - \frac{1}{(\underline{a}^n)^T \underline{v}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} ((\underline{a}^i)^T \underline{v}) z_i - \underline{b}^T \underline{v} \right\} \underline{a}^n$$

(d.i. identiteit)

en vanwege $z_i \geq 0$, $(\underline{a}^i)^T \underline{v} \geq 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $(\underline{a}^n)^T \underline{v} < 0$, $\underline{b}^T \underline{v} < 0$
volgt

$$\underline{b} \in K(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n),$$

zodat geval i. niet kan optreden, immers strijdig met gegeven van de te bewijzen uitspraak.

ad ii: Uit inductie veronderstelling en vanwege (4.7) bestaat een $\underline{w} \in R_m$ met

$$(\hat{\underline{a}}^i)^T \underline{w} \geq 0, \quad i=1,\dots,n-1, \quad \hat{\underline{b}}^T \underline{w} < 0:$$

dan is

$$\underline{y} = ((\underline{a}^n)^T \underline{w})\underline{v} - ((\underline{a}^n)^T \underline{v})\underline{w} \quad \text{opl. van} \quad (4.5)$$

omdat (zie (4.6))

$$(\underline{a}^i)^T \underline{y} = ((\underline{a}^n)^T \underline{w})((\underline{a}^i)^T \underline{v}) - ((\underline{a}^n)^T \underline{v})((\underline{a}^i)^T \underline{w}) = (\hat{\underline{a}}^i)^T \underline{w} \geq 0$$

$$i=1,\dots,n-1,$$

$$(\underline{a}^n)^T \underline{y} = 0, \quad \underline{b}^T \underline{y} = \hat{\underline{b}}^T \underline{w} < 0.$$

(w.l.t.b.w.)

Opm. 1. St. 4.1 en 4.2 heten wel "alternatief" stellingen.

Opm. 2. Meetkundige interpretatie van Stelling 4.2: Òf $\underline{b}$ ligt binnen de kegel $K(\underline{a}^1,\dots,\underline{a}^n)$ òf er bestaat een hypervlak door de oorsprong dat $\underline{b}$ van deze kegel scheidt.

Opm. 3 $\underline{x} > \underline{0}$ betekent alle comp. van $\underline{x} > 0$

Stelling 4.3 De stelsels $A^T \underline{y} \geq \underline{0}$ en $A\underline{x} = \underline{0}, \ \underline{x} \geq \underline{0}$ bezitten oplossingen $\tilde{\underline{y}}$ en $\tilde{\underline{x}}$ met

$$A^T \tilde{\underline{y}} + \tilde{\underline{x}} > \underline{0}$$

Bewijs Laten $\underline{a}^1,\dots,\underline{a}^n$ kolomvectoren van A zijn. Beschouw

(4.8) $$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \underline{a}^i x_i = -\underline{a}^k, \quad x_i \geq 0, \quad i \neq k$$

en

(4.9) $$(\underline{a}^i)^T \underline{y} \geq 0, \quad i=1,\dots,n; \quad i \neq k$$

$$(\underline{a}^k)^T \underline{y} > 0.$$

Volgens St. 4.2 blz. 38 is voor vaste k juist één van deze stelsels oplosbaar

Heeft (4.8) een oplossing, dan bestaat een.

$\tilde{\underline{x}}^{\kappa} \in R_n$ met $A\tilde{\underline{x}}^{\kappa} = \underline{0}$, $\tilde{\underline{x}}^{\kappa} \geq \underline{0}$ en comp $x^{\kappa}_{\kappa} = 1$

Is (4.9) oplosbaar, dan bestaat een vector

$\tilde{\underline{y}}^{\kappa} \in R_m$ met $A^T\tilde{\underline{y}}^{\kappa} \geq \underline{0}$ en $(\underline{a}^{\kappa})^T\tilde{\underline{y}}^{\kappa} > 0$.

Zij Z_1 verz. van indices κ waarvoor (4.8) oplosbaar is.

Z_2 " " " κ " (4.9) " "

Dan Z_1, Z_2 disjunct en $Z_1 \cup Z_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$

Zij $\tilde{\underline{x}} = \sum_{\kappa \in Z_1} \tilde{\underline{x}}^{\kappa}$, $\tilde{\underline{y}} = \sum_{\kappa \in Z_2} \tilde{\underline{y}}^{\kappa}$
dan

$$A^T\tilde{\underline{y}} \geq \underline{0}, \quad A\tilde{\underline{x}} = \underline{0}, \quad \tilde{\underline{x}} \geq \underline{0}, \quad A^T\tilde{\underline{y}} + \tilde{\underline{x}} > \underline{0}$$

In laatste relatie kan "=" teken niet optreden immers voor een $\kappa \in Z_1 \cup Z_2$ is òf $x^{\kappa}_{\kappa} = 1$ òf $(\underline{a}^{\kappa})^T\tilde{\underline{y}}^{\kappa} > 0$.

<u>Stelling</u> 4.4 A zij een scheefsymmetrische n-rijige matrix. Er bestaat een $\underline{w} \in R_n$ zo dat

$$A\underline{w} \geq \underline{0}, \quad \underline{w} \geq \underline{0}, \quad A\underline{w} + \underline{w} > \underline{0}.$$

<u>Bewijs</u> Daar A scheef symm. is, geldt

$$A^T = -A.$$

De beide stelsels

$$\begin{bmatrix} I_n \\ A \end{bmatrix} \underline{y} \geq \underline{0} \quad \text{en} \quad [I_n, -A] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} \geq \underline{0}$$

met I_n n-rijige eenheidsmatrix, hebben volgens stelling 4.3 oplossingen $\tilde{\underline{y}}, \tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{z}}$ met

(merk op) $\begin{bmatrix} I_n \\ A \end{bmatrix}^T = [I_n, -A]$)

$\tilde{\underline{y}} \geq \underline{0}$, $A\tilde{\underline{y}} \geq \underline{0}$, $\tilde{\underline{x}} - A\tilde{\underline{z}} = \underline{0}$, $\tilde{\underline{x}} \geq \underline{0}$, $\tilde{\underline{z}} \geq \underline{0}$,

$\tilde{\underline{y}} + \tilde{\underline{x}} > \underline{0}$, $A\tilde{\underline{y}} + \tilde{\underline{z}} > \underline{0}$

dus ook $\Longrightarrow$ $\tilde{\underline{y}} + A\tilde{\underline{z}} > \underline{0}$

Stel nu $\underline{w} = \tilde{\underline{y}} + \tilde{\underline{z}}$ dan

$A\underline{w} \geq \underline{0}$, $\underline{w} \geq \underline{0}$ en $A\underline{w} + \underline{w} > \underline{0}$.

(w. t. b. w.)

Dualiteit

Zij A $m \times d$ matrix, $\underline{x}, \underline{p} \in R_d$
$\underline{b}, \underline{w} \in R_m$

De beide optimaliserings problemen

(4.10) $\hat{D}_0$: $A\underline{x} \geq \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{0}$, $Q(\underline{x}) \equiv \underline{p}^T\underline{x}$ minimaal

(4.11) $\hat{D}_1$: $A^T\underline{w} \leq \underline{p}$, $\underline{w} \geq 0$, $\xi(\underline{w}) \equiv \underline{b}^T\underline{w}$ maximaal

heten elkaars <u>duale</u>.

De matrix

$$\begin{pmatrix} O_m & A & -\underline{b} \\ -A^T & O_d & \underline{p} \\ \underline{b}^T & -\underline{p}^T & 0 \end{pmatrix}$$

waarin O_k de k-rijige, vierkante nulmatrix,

is scheef symmetrisch.

Op grond van stelling 4.4 blz. 41 bestaat er nu een vector (t een getal)

$$\begin{bmatrix} \tilde{\underline{w}} \\ \tilde{\underline{x}} \\ t \end{bmatrix} \in R_{m+q+1}$$

zodanig dat geldt

(4.12) $\tilde{\underline{w}} \geq \underline{0}, \quad \tilde{\underline{x}} \geq \underline{0}, \quad t \geq 0$

(4.13) $A\tilde{\underline{x}} - \underline{b}t \geq \underline{0} \qquad -A^T\tilde{\underline{w}} + \underline{p}t \geq \underline{0}$

(4.14) $\underline{b}^T\tilde{\underline{w}} - \underline{p}^T\tilde{\underline{x}} \geq \underline{0},$

(4.15) $A\tilde{\underline{x}} - \underline{b}t + \tilde{\underline{w}} > \underline{0} \qquad -A^T\tilde{\underline{w}} + \underline{p}t + \tilde{\underline{x}} > \underline{0}$

(4.16) $\underline{b}^T\tilde{\underline{w}} - \underline{p}^T\tilde{\underline{x}} + t > 0$

<u>Opm</u> 4. Uit (4.10) en (4.11) volgt (direct) dat voor toelaatbare $\underline{x}$ en $\underline{w}$ (d.w.z. vectoren die aan nevencond. en tekencond. voldoen) altijd geldt

(4.17) $g(\underline{w}) \equiv \underline{w}^T\underline{b} \leq \underline{w}^T A\underline{x} \leq \underline{p}^T\underline{x} \equiv Q(\underline{x})$

We beschouwen in (4.12),...,(4.16) twee gevallen nm. $t > 0$ en $t = 0$.

<u>Stelling</u> 4.5. Zij $t > 0$. Dan bestaan er optimale oplossingen $\underline{x}^0$ en $\underline{w}^0$ van $\hat{D}_0$, resp. $\hat{D}_1$ met

(4.18) $\underline{b}^T\underline{w}^0 = \underline{p}^T\underline{x}^0,$

(4.19) $A\underline{x}^0 + \underline{w}^0 > \underline{b}, \quad A^T\underline{w}^0 - \underline{x}^0 < \underline{p}.$

<u>Bewijs</u> Stel $\underline{x}^0 = \frac{1}{t}\tilde{\underline{x}}$ en $\underline{w}^0 = \frac{1}{t}\tilde{\underline{w}}$, met $\tilde{\underline{x}}$ en $\tilde{\underline{w}}$ als boven gedefinieerd (begin blz. 43). Uit (4.12) en (4.13) volgt dat $\underline{x}^0$ en $\underline{w}^0$ toelaatbare vectoren zijn voor $\hat{D}_0$, resp. $\hat{D}_1$.

Uit (4.14) en (4.17) volgt (4.18), en eveneens dat $\underline{x}^0$ en $\underline{w}^0$ optimaal zijn voor $\hat{D}_0$, resp. $\hat{D}_1$, tenslotte volgt (4.19) uit (4.15). w.t.b.w.

<u>Stelling</u> 4.6. Zij $t = 0$, dan:

i. minstens één van de problemen $\hat{D}_0$, $\hat{D}_1$ bezit geen toelaatbare vectoren;

ii. is de verz. van toelaatbare vectoren van één der problemen $\hat{D}_0$, $\hat{D}_1$ niet leeg, dan is deze verz. niet begrensd en ook is op deze verz. de nutsfunctie niet begrensd;

iii. geen der beide problemen bezit een optimale oplossing.

<u>Bewijs</u>

i. Zijn $\underline{x}'$ en $\underline{w}'$ toelaatbare vectoren van $\hat{D}_0$, resp. $\hat{D}_1$ dan uit (4.16) en (4.13) voor $t = 0$

(4.20) $$\underline{p}^T \tilde{\underline{x}} < \underline{b}^T \tilde{\underline{w}} \le (A\underline{x}')^T \tilde{\underline{w}} = (\underline{x}')^T A^T \tilde{\underline{w}} \le 0,$$

en

$$0 \le (\underline{w}')^T A \tilde{\underline{x}} = (A^T \underline{w}')^T \tilde{\underline{x}} \le \underline{p}^T \tilde{\underline{x}}$$, tegenspraak.

ii. Zij $\underline{x}'$ toelaatbare vector voor $\hat{D}_0$.

Nu $\underline{x}' + \lambda \tilde{\underline{x}}$ voor alle $\lambda \ge 0$ toelaatbare vector vanwege $A\underline{x}' \ge \underline{b}$ en $A \tilde{\underline{x}} \ge \underline{0}$.

De nutsfunctie $\underline{p}^T(\underline{x}' + \lambda \tilde{\underline{x}}) = \underline{p}^T \underline{x}' + \lambda \underline{p}^T \tilde{\underline{x}}$ is voor $\lambda \ge 0$ niet naar onderen begrensd vanwege $\underline{p}^T \tilde{\underline{x}} < 0$ (4.20).

iii. volgt uit ii. (vl. t. b. vv)

<u>Stelling 4.7</u> Bezitten $\hat{D}_0$ en $\hat{D}_1$ beide toelaatbare vectoren, dan bestaat een stelsel optimaal oplossingen $\underline{x}^0$ en $\underline{w}^0$ zodanig dat:
een comp. x_k^0 van $\underline{x}^0$ is dan en alleen dan positief als in de nevenvoorwaarde met index k van het duale probleem $\hat{D}_1$ voor $\underline{w} = \underline{w}^0$ het gelijkteken geldt; het analoge geldt voor $\underline{w}^0$.

<u>Bewijs</u>. Daar zowel $\hat{D}_0$ als $\hat{D}_1$ toelaatbare vectoren bezitten moet $t > 0$ zijn (resp. St. 4.5 en 4.6. blz. 43 en 44). Dus bestaat een paar optimale opl. $\underline{x}^0$ en $\underline{w}^0$, zodat uit (4.10)

$$(A\underline{x}^0)^T \geq \underline{b}^T$$

Nu uit (4.18)

$$\underline{p}^T\underline{x}^0 = \underline{b}^T\underline{w}^0 \leq (A\underline{x}^0)^T\underline{w}^0 = (\underline{w}^0)^T A\underline{x}^0 = (A^T\underline{w}^0)^T\underline{x}^0$$

zodat

$$\{\underline{p}^T - (A^T\underline{w}^0)^T\}\underline{x}^0 \leq 0 \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\underline{p} - A^T\underline{w}^0)_k \, x_k^0 \leq 0, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Nu $\quad (\underline{p} - A^T\underline{w}^0)_k \geq 0, \quad x_k^0 \geq 0 \quad$, alle $k = 1, \ldots, q$

zodat uit laatste drie relaties

$$\sum_{k=1}^{n} (\underline{p} - A^T\underline{w}^0)_k \, x_k^0 = 0$$

met iedere term niet negatief, dus

$$(\underline{p} - A^T\underline{w}^0)_k \, x_k^0 = 0, \quad \text{alle } k = 1, \ldots, q.$$

Uit (4.19) volgt nu dat beide vectoren niet gelijktijdig nul kunnen zijn. (vl. t. b. vv)

Stelling 4.8 $\hat{D}_0$ heeft dan en alleen dan een optimale oplossing als de verzameling van zijn toelaatbare vectoren niet leeg is en de nutsfunctie $Q(\underline{x})$ op deze verzameling naar onderen begrensd is.

Bewijs. Het is triviaal dat genoemde voorwaarden nodig zijn voor het bestaan van een optimale oplossing. Zij zijn ook voldoende daar het geval $t=0$ (zie St. 4.6, ii. blz. 44) hier niet mogelijk is.

(w.t.b.w)

Opm 6.

- A $m \times d$ matrix, $\underline{x}, \underline{p} \in R_d$, $\underline{b}, \underline{w} \in R_m$.

$\hat{D}_0$: $A\underline{x} \geq \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{0}$ $\underline{p}^T\underline{x}$ minimaal

D_{00} : $[A, -I_m]\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{bmatrix} = \underline{b}$ $\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{bmatrix} \geq \underline{0}$ $\begin{bmatrix}\underline{p}\\ \underline{0}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{bmatrix}$ minimaal

D_{01} : $\begin{bmatrix}A^T\\ -I_m\end{bmatrix}\underline{w} \leq \begin{bmatrix}\underline{p}\\ \underline{0}\end{bmatrix}$ $\underline{w}^T\underline{b}$ maximaal

$\hat{D}_1$: $A^T\underline{w} \leq \underline{p}$ $\underline{w} \geq \underline{0}$ $\underline{w}^T\underline{b}$ maximaal

Volgt $\hat{D}_0$ equiv. D_{00} $\hat{D}_1$ equiv. D_{01}

$\hat{D}_0$ en $\hat{D}_1$ duaal $\Rightarrow$ D_{00} en D_{01} duaal

Deze Opm 5 eventueel pas lezen aan het einde van §5.

Opm. 5 Als $\hat{D}_0$ numeriek is opgelost kan de oplossing $\underline{w}^0$ van $\hat{D}_1$ als volgt verkregen worden.
Zij weer

$$Z_0 = \{k : x_k^0 > 0\},$$

dan volgt uit St. 4.7 blz. 45 dat $\underline{w}^0$ voldoet aan

$$(A^T \underline{w}^0)_k = p_k, \quad k \in Z.$$

of

(4.21) $$(\underline{a}^k)^T \underline{w}^0 = p_k, \quad k \in Z.$$

waarin dus $\{\underline{a}^k\}$ de basis (zie def. 2.3 blz. 19) behorend bij hoekpunt $\underline{x}^0$.

Stelsel (4.21) bijzonder eenvoudig op te lossen als zich onder de kolom vectoren $\underline{a}^i$ van A m eenheidsvectoren bevinden.

Bijv. In geval $\hat{D}_0$ (zie (4.10)) voer in de slack variabelen $-y_1, \dots, -y_m$, verg. (2.10)

(4.22) $$\hat{A} = [A, -I_m]$$

Zij nu c_{ki} bepaald door

$$\sum_{k \in Z} c_{ki} \underline{a}^k = -\underline{a}^i, \quad i = q+1, \dots, q+m$$

met $\underline{a}^i$ de i: kolom vector in $\hat{A}$, $i=q+1,\dots,q+m$.

Dan zijn c_{ki} de inverse elementen van de coëf. matrix in (4.21), zodat

$$w_i^0 = \sum_{k\in Z} c_{k,i+q}\, p^k, \quad i=1,\dots,m.$$

Volgt uit (3.11)

$$w_i^0 = t_{i+q}$$

Vanwege

$$d_i = t_i - p_i \qquad \text{(zie blz. 28)}$$

is

(4.23) $$w_i^0 = d_{i+q} + p_{i+q} \qquad i=1,\dots,m,$$
$$= d_{i+q} \qquad \text{door } p_i=0, \text{ voor } i=1,\dots,m,$$

en d_{i+q} wordt nu afgelezen uit het eind-schema van de simplex methode ter bepaling van x^0.

5. Dualiteit. II.

Voor A een matrix $m \times n$ — m rijen met n kolommen

(5.1) $\quad \text{rang } A = m \quad$ en $\quad m < n$

en

(5.2) $\quad \underline{b} \in R_m, \; \underline{p} \in R_n, \quad \underline{x} \in R_n, \quad \underline{w} \in R_m$

beschouwen we de beide L.P. problemen

(5.3) D_0 : $\quad A\underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{x} \geq \underline{0}, \quad G(\underline{x}) = \underline{p}^T\underline{x}$ minimaal

(5.4) D_1 : $\quad A^T\underline{w} \leq \underline{p}, \qquad G(\underline{w}) = \underline{w}^T\underline{b}$ maximaal.

Opm. 1 $\quad D_1$ is een L.P. probleem zonder teken condities.

Def. 5.1 $\quad D_1$ heet het duale probleem van D_0.

Stelling 5.1 $\quad \hat{D}_0$ en $\hat{D}_1$ als gedefinieerd in (4.10) en (4.11) blz. 42 zijn elkaars duale in de zin van def. 5.1.

Bewijs: In dit bewijs gebruiken we voor A, $\underline{x}$, $\underline{b}$, $\underline{w}$, $\underline{p}$ de betekenis zoals deze in (4.10) en (4.11) gebruikt is!

In (4.10) voeren we in de sluik vector $\underline{y} \in R_m$, zodat (4.10) te schrijven is als

(5.5) $\quad A\underline{x} - \underline{y} = \underline{b}, \quad \underline{x} \geq 0, \; \underline{y} \geq 0, \qquad \underline{p}^T\underline{x}$ minimaal

of, met

(5.6) $\quad \begin{pmatrix} \underline{p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R_{q+m}, \quad \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \in R_{q+m}, \quad I_m = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{m} \Big\} m$

(5.7) $\hat{D}_0 : [A, -I_m]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = b$. $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \geq 0$, $\begin{bmatrix}p\\0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ minimaal

Het duale probleem van $\hat{D}_0$ in de zin van def.(5.1) is nu,

merk op: $[A, -I_m]$ is $m \times (m+n)$ en heeft rang $= m$

(5.8) $\begin{bmatrix}-A^T\\-I_m\end{bmatrix} w \leq \begin{bmatrix}p\\0\end{bmatrix}$, $w^T b$ maximaal

het geen equivalent is met

(5.8) $-A^T w \leq p$, $-w \leq 0$, $w^T b$ maximaal.

Het L.P. probleem (5.8) is echter identiek met $\hat{D}_1$ volgens (4.11), zodat inderdaad $\hat{D}_1$ het duale is van $\hat{D}_0$ in de zin van def. 5.1, analoog volgt $\hat{D}_0$ duale van $\hat{D}_1$ in de zin van def. 5.1

(w.t.b.w)

We bewijzen nu een aantal stellingen analoog aan die in §4 omtrent de optimale oplossingen van D_0 en D_1.

<u>Stelling</u> 5.2 Als x en w toelaatbare vectoren zijn van D_0, resp. D_1 dan

(5.9) $$p^T x = Q(x) \geq \xi(w) = w^T b.$$

<u>Bewijs</u> Uit (5.3) en (5.4)

$$x \geq 0 \text{ en } p \geq A^T w \Rightarrow p^T x \geq (A^T w)^T x = w^T A x = w^T b.$$

(w.t.b.w)

<u>Stelling</u> 5.3 D_0 heeft dan en alleen dan een eindige optimale oplossing x^0 als D_1 een begrensde optimale oplossing w^0 heeft; en

(5.10) $$p^T x^0 = w^{0T} b .$$

indien $Q(x^0)$ en $\xi(w^0)$ eindig.

<u>Bewijs</u> Zij $\underline{x}^0$ een eindige optimale opl. van D_0.
Op grond van St. 2.6. blz. 16 en St. 2.7. blz. 17 kunnen wr aannemen dat $\underline{x}^0$ een hoekpunt is.
Zij dus

(5.11) $$\underline{x}^0 = [x_1^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0]^T.$$

De kolomvectoren $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^m$ vormen een basis voor $\underline{x}$.

Zij nu

(5.11) $$C = [c_{\kappa i}] \qquad \kappa = 1, \ldots, m \quad i = 1, \ldots, n$$

(5.12) $$\underline{t} = [t_1, \ldots, t_n]^T$$

met $c_{\kappa i}$ en t_i gedefinieerd als in (3.6). blz. 21 en (3.11) blz. 25. d.w.z.

(5.13) $$\underline{a}^i = \sum_{\kappa=1}^{m} \underline{a}^\kappa c_{\kappa i} \qquad \text{met } \underline{a}^i \text{ } i^e \text{ kolomvector van } A \quad i = 1, \ldots, n$$

(5.14) $$t_i = \sum_{\kappa=1}^{m} p_\kappa c_{\kappa i}.$$

We mogen nu veronderstellen dat

(5.15) $$t_i \doteq p_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n,$$

voor $\underline{x}^0$ een niet-ontaard hoekpunt is dit gerechtvaardigd vanwege St. 3.1 en 3.2 blz. 26, voor $\underline{x}^0$ een ontaard hoekpunt vanwege St. 3.5, blz. 23 Collatz & Wetterling.

Zij nu

(5.16) $$\tilde{A} = [\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^m] \qquad \text{d.i. matrix met kolomvectoren } \underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^m.$$

$$\tilde{\underline{x}}^0 = [x_1^0, \ldots, x_m^0]^T$$

$$\tilde{\underline{p}} = [p_1, \ldots, p_m]^T$$

dan is dus

$$\tilde{A}\tilde{x}^0 = b \qquad , \qquad \tilde{A}C = -A$$

zodat

(5.17) $$\tilde{x}^0 = \tilde{A}^{-1} b \quad \text{en} \quad C = -\tilde{A}^{-1}A.$$

Vanwege (5.14) en (5.15)

(5.18) $$\tilde{p}^T C = t^T \leq p^T.$$

We tonen nu aan dat

(5.19) $$w^0 \overset{\text{def}}{=} (\tilde{A}^{-1})^T \tilde{p}$$

een opt. opl. is voor D_1.

Uit (5.17) en (5.18)

$$(w^0)^T A = \tilde{p}^T \tilde{A}^{-1} A = \tilde{p}^T C \leq p^T$$

zodat w^0 een toelaatbare vector voor D_1.

Verder uit (5.17)

(5.20) $$Q(w^0) = (w^0)^T b = \tilde{p}^T \tilde{A}^{-1} b = \tilde{p}^T \tilde{x}^0 = Q(x^0).$$

Op grond van St. 5.2 blz. 48 is dus w^0 als gedef. in (5.19) een opt. oplossing van D_1 (zie het "z" in (5.9)) onder de nevenvoorwaarde D_0, immers w^0 is uit een opt. opl. van D_0 geconstrueerd.

Tevens is aangetoond dat w^0 en x^0 tot dezelfde opt. waarden van $Q(\cdot)$ en $Q(\cdot)$ leiden (zie (5.20)).

Veronderstel nu D_1 heeft een eindige opt. oplossing.

Stel

(5.21) $$w \overset{\text{def}}{=} w^1 - w^2 \qquad \text{met} \quad w^1 \geq 0 \,, \; w^2 \geq 0$$

$$w^3 \overset{\text{def}}{=} p - A^T w$$

dan is D_1 equivalent met

(5.22) $A^T(-\underline{w}^1+\underline{w}^2)-\underline{w}^3=-\underline{p}$, $\underline{w}^1\geq\underline{0}$, $\underline{w}^2\geq\underline{0}$, $\underline{w}^3\geq\underline{0}$

$\underline{b}^T(-\underline{w}^1+\underline{w}^2)$ minimaal

Met

(5.23) $\underline{v}^T \overset{def}{=} \begin{pmatrix}\underline{w}^1\\ \underline{w}^2\\ \underline{w}^3\end{pmatrix}$ $\underline{z} \overset{def}{=} \begin{pmatrix}-\underline{b}\\ +\underline{b}\\ \underline{0}\end{pmatrix} \in R_{2m+n}$

$S \overset{def}{=} [-A^T, A^T, -I_n]$

Zij

(5.24) $\tilde{D}_1$: $S\underline{v}=-\underline{p}$, $\underline{v}\geq 0$, $\underline{z}^T\underline{v}$ minimaal

zodat (vergl (5.22))

$\tilde{D}_1$ equivalent met D_1.

Vanwege de veronderst. D_1 heeft een eindige opt. opl. heeft $\tilde{D}_1$ een eindige opt. opl.
Echter is $\tilde{D}_1$ van de vorm D_0, zodat op grond van 1e deel van dit bewijs (vergl. 5.20) heeft de duale $\tilde{D}_2$ van $\tilde{D}_1$ (in de zin van def. 5.1) dan ook een eindige opt. opl. met dezelfde opt. waarde als $\tilde{D}_1$.

Uit (5.24) en (5.3), (5.4) volgt nu voor duale $\tilde{D}_2$ van $\tilde{D}_1$

(5.25) $\tilde{D}_2$: $S^T\underline{x}\leq\underline{z}$, $\underline{x}^T(-\underline{p})$ maximaal, voor $\underline{x}\in R_n$.

Uit (5.25) en (5.23) volgt

(5.26) $-A\underline{x}\leq-\underline{b}$, $A\underline{x}\leq\underline{b}$, $-\underline{x}\leq\underline{0}$, $\underline{p}^T\underline{x}$ minimaal,

zodat $\tilde{D}^2$ equivalent D_0 is.
Passen we nu weer 1e deel bewijs toe, dan volgt de bewering van de stelling. (w.t.b.w.)

<u>Stelling</u> 5.4 Is de functie $Q(\cdot)$ op de verz. van toelaatbare vectoren van D_0 niet naar onderen begrensd, dan is de verz. van toelaatbare vectoren van D_1 leeg. Is de functie $G(\cdot)$ op de verz. van toelaatbare vectoren van D_1 niet naar boven begrensd, dan is de verz. van toelaatbare vectoren van D_0 leeg.

<u>Bewijs.</u> Zij $\underline{w}$ een toelaatbare vector van D_1, dan voor iedere toelaatbare $\underline{x}$ van D_0

$$Q(\underline{x}) \geq G(\underline{w}) \quad , \text{ zie St. 5.2, blz. 48,}$$

zodat $Q(x)$ naar onderen begrensd. Analoog voor het 2e deel van de stelling. (w.t.b.w.)

<u>Stelling</u> 5.5 Een toelaatbare vector $\underline{x}^0$ van D_0 is alleen dan een opt. opl. wanneer er een toelaatbare vector $\underline{w}^0$ van D_1 bestaat zodanig dat

$$\underline{p}^T \underline{x}^0 = \underline{b}^T \underline{w}^0,$$

en dan is $\underline{w}^0$ opt. opl. van D_1. Analoog wanneer men van $\underline{w}^0$ en D_1 uitgaat.

<u>Bewijs</u>: Volgt direct uit St. 5.1, blz. 47 en St. 5.2, blz. 48.

<u>Stelling</u> 5.6 Een toelaatbare vector $\underline{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^T$ van D_0 is dan en alleen dan een opt. opl. van D_0 als er een toelaatbare vector $\underline{w}^0$ van D_1 bestaat met de eigenschap:

(5.27) $(\underline{a}^k)^T \underline{w}^0 = p_k$ voor alle k met $x_k^0 > 0$,

$(\underline{a}^h)^T \underline{w}^0 < p_h$ " " h " $x_h^0 = 0$;

en $\underline{w}^0$ is dan een opt. opl. van D_1;
het analoge geldt indien men van $\underline{w}^0$ en D_1 uitgaat.

<u>Bewijs</u> Voor $\underline{x}^0$ en $\underline{w}^0$ toelaatbare vectoren voor D_0 resp. D_1 volgt uit $A\underline{x}^0 = \underline{b}$, indien

(5.28) $$\underline{p}^T \underline{x}^0 = \underline{b}^T \underline{w}^0$$

dat

$$\underline{p}^T \underline{x}^0 = (\underline{x}^0)^T A^T \underline{w}^0 = (\underline{w}^0)^T A \underline{x}^0$$

of

(5.29) $$0 = (\underline{p}^T - (\underline{w}^0)^T A)\underline{x}^0 = \sum_{i=1}^n (p_i - (\underline{a}^i)^T \underline{w}^0) x_i^0 .$$

Iedere term in laatste som is niet-neg, zodat uit (5.28), St. 5.5 blz. 52 en (5.29) de bewering volgt.
(w.t.b.w)

<u>Stelling</u> 5.7 Bezitten D_0 en D_1 beide toelaatbare vectoren, dan hebben beide opt. oplossingen.

<u>Bewijs</u>. Zij M de verz. van toelaatbare vectoren van D_0 en $\hat{\underline{w}}$ een toelaatbare vector van D_1, dan is vanwege St. 5.2, blz. 48 $Q(\underline{x}) \geq g(\hat{\underline{w}})$ voor $\forall \underline{x} \in M$.
$Q(\underline{x})$ is op M naar onderen begrensd, St. 5.4. blz. 52. Op grond van St. 2.3 blz. 12 heeft M een hoekpunt $\bar{\underline{x}}$. De simplex methode levert, startend in $\bar{\underline{x}}$ een eindige opt. opl. $\underline{x}^0$ van D_0 want het in St. 3.2 blz. 26 genoemde geval, dat D_0 geen opt. oplossing heeft, kan hier niet optreden omdat $Q(\underline{x})$ op M naar onderen begrensd is. Op grond van St. 5.3 blz. 48 heeft dan ook D_1 een eindige opt. opl.
(w.t.b.w.)

<u>Opm</u> 2. Uit resultaten van deze § volgen de analoge van § 4.

<u>Opm</u> 3. Voor bepaling opl. v/h duale probleem uit rekenschema voor het oorspronkelijke zie blz. 46, 46ª.

Inleiding Speltheorie

1. Definities, voorbeelden

Twee personen P_1 en P_2 spelen samen spel.

P_1 beschikt over de akties $\sigma_1^1, \ldots, \sigma_m^1$
P_2 " " " " $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$

Spel: P_1 kiest een actie, zeg σ_h^1
P_2 kiest " " " σ_k^2

Zij kiezen hun acties gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar

Na keuze van hun acties ontvangt P_1 van P_2 een bedrag a_{hk}

$A = (a_{hk})$ is de uitbetalings matrix.

P_1 \ P_2	σ_1^2	σ_2^2	$\ldots$	σ_n^2
σ_1^1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
σ_2^1	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
$\ldots$				
σ_m^1	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

(1.1) **Def. 1.1.** $\Sigma_1 \overset{def}{=} \{\sigma_1^1, \ldots, \sigma_m^1\}$, $\Sigma_2 \overset{def}{=} \{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2\}$

$$A = (a_{hk}), \quad h = 1, \ldots, m; \; k = 1, \ldots, n,$$

bepalen een matrix spel.

Voorbeeld 2

Knobel-spel

Iedere speler kiest uit zelfde drie mogelijkheden
Steen, Schaar, Papier

Steen wint van Schaar
Schaar .. .. Papier
Papier .. .. Steen

Overige gevallen "remise"

winst of verlies hier steeds één eenheid

P_1 \ P_2	Steen	Schaar	Papier
Steen	0	1	-1
Schaar	-1	0	1
Papier	1	-1	0

Voorbeeld 2

Skin spel

P_1 heeft 3 kaarten Ruiten Aas, Schoppen Aas, Ruiten 2
P_2 .. 3 .. .., Schoppen 2

Ieder der spelers legt een kaart op tafel.
P_1 wint als beide kaarten zelfde kleur hebben
P_2 .. .. verschillende .. ..

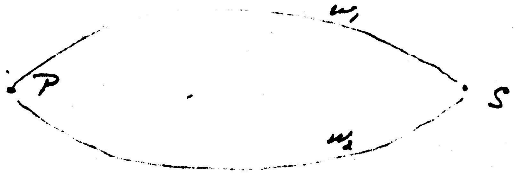
Uit betalings matrix (winst van P_1)

P_1 \ P_2	R A	S A	S 2
R A	1	-1	-2
S A	-1	1	1
R 2	2	-1	-2

Voorbeeld 3

Generaal Blotto spel

Aanvaller beoogt met 4 divisies vanuit P de stad S.



Generaal Blotto heeft ter verdediging van S 5 divisies beschikbaar.

Er zijn 2 aanvalswegen w_1, w_2 beschikbaar.

Aanvaller stuurt enkele of alle divisies langs w_1 en/of w_2.
Blotto stationeert ter verdediging enkele of alle van zijn divisies op w_1 en/of w_2.

Aanvaller breekt door langs w_1 dan en alleen dan als hij meer divisies op w_1 heeft dan Blotto, analoog voor w_2.

aanvaller op w_1	w_2	Blotto op w_1: 5 / w_2: 0	4 / 1	3 / 2	2 / 3	1 / 4	0 / 5
4	0	−1	−1	1	1	1	1
3	1	1	−1	−1	1	1	1
2	2	1	1	−1	−1	1	1
1	3	1	1	1	−1	−1	1
0	4	1	1	1	1	−1	−1

Veronderstel het matrix spel (zie def. 1.1. blz. 1) wordt herhaald gespeeld,

en per spel

P_1 kiest actie σ_j^1 met kans x_j

P_2 " " σ_i^2 " " y_i

(1.2) $x_j \geq 0 \,,\quad j = 1, \ldots, m \qquad \sum_{j=1}^{m} x_j = 1$

$y_i \geq 0 \,,\quad i = 1, \ldots, n \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$

<u>Def. 1.2.</u> De vector $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}$ heet <u>strategie</u> van P_1

Is een v/d comp. van $\underline{x}$ gelijk één dan heet de strategie een <u>zuivere</u>, anders <u>gemengd</u>.

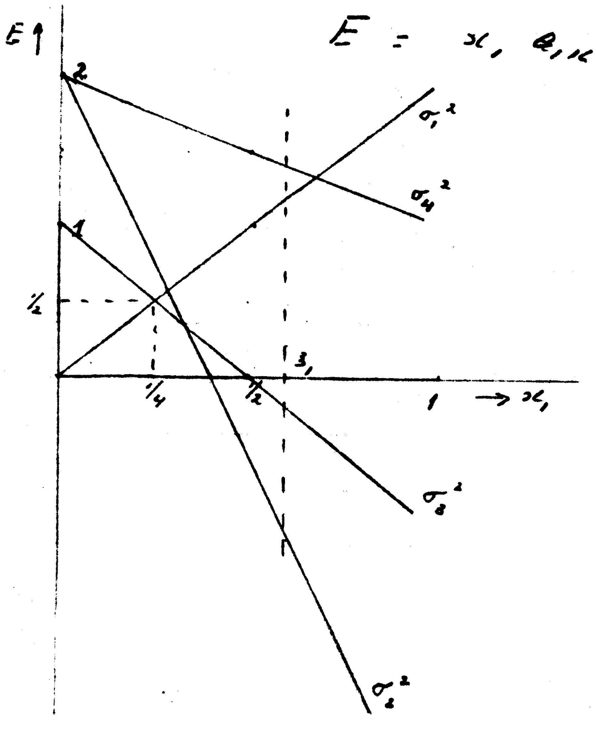
<u>Voorbeeld 4.</u>

P_1 \ P_2	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2
σ_1^1	2	−3	−1	1
σ_2^1	0	2	1	2

Veronderstel: P_2 kiest altijd actie σ_k^2

dan math. verw. E van winst P_1

(1.3)



$$E = x_1 a_{1k} + (1 - x_1) a_{2k}$$

als $(x_1, 1-x_1)$ strat. P_1

In fig. E als functie van x_1 voorgesteld voor $k = 1, 2, 3, 4$

σ_1^2: $E = 2x_1$

σ_2^2: $\quad = -3x_1 + 2(1-x_1)$

σ_3^2: $\quad = -x_1 + (1-x_1)$

σ_4^2: $\quad = x_1 + 2(1-x_1)$

Voor $x_1 = \frac{3}{4}$, is $E > 0$ voor $k = 1,4$

< 0 ,, $k = 2,3$.

P_1 doet het beste door te kiezen $x = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$

zijn winstverwachting is dan altijd $\geq \frac{1}{2}$.

Opm. 1 Bij dit spel kan P_1 zijn strategie dus zo kiezen dat zijn winstverwachting > 0 is. Het spel is "unfair" t.g.v. P_1

Uit fig. blijkt dat P_2 nooit de acties σ_2^2 of σ_4^2 moet kiezen, door keuze van een andere actie kan hij immers zijn winstverwachting verbeteren.

Voor P_2 met $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ 1-y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad 2y_1 - (1-y_1)$ als P_1 σ_1^1 kiest

$1 - y_1$,, P_1 σ_2^1 ,,

Uit $2y_1 - (1-y_1) \leq \frac{1}{2} \rightarrow y_1 \leq \frac{1}{2}$

$1 - y_1 \leq \frac{1}{2} \rightarrow y_1 \geq \frac{1}{2}$ $\rightarrow y_1 = 1/2$

Dus optimale strat. P_1 $x = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^T$

,, P_2 $y = [\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0]^T$

waarde v/h spel $v = \frac{1}{2}$.

Zij $D_1 \overset{def}{=} \{ x : x \in R_m ,\ x \geq 0,\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \}$

$D_2 \overset{def}{=} \{ y : y \in R_n ,\ y \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \}$,

zodat D_k de verz. van strategiën van P_k, $k=1,2$.

Volgt Math. verw. winst W van P_1

(1.4) $$W = \sum_{j,i} x_j a_{ji} y_i = x^T A y$$

P_1 wil door keuze van x W zo groot mogelijk maken

P_2 .. .. y W zo klein .. ..

dus keuze van x zo dat $\min_{y \in D_2} x^T A y$ maximaal.

Daar iedere $y \in D_2$ een convexe comb. is van zuivere strat.

volgt

(1.5) $$\varphi(x) \overset{def}{=} \min_{y \in D_2} x^T A y = \min_k \sum_j x_j a_{jk} ,\quad x \in D_1$$

zodat P_1 een $x \in D_1$ moet kiezen zodat $\varphi(x)$ maximaal wordt.

Zij

(1.6) $$v_1 \overset{def}{=} \max_{x \in D_1} \varphi(x) = \max_{x \in D_1} \min_k \sum_j x_j a_{jk}$$

Wat moet P_2 nu doen?
Natuurlijk een $y \in D_2$ kiezen, zodanig dat

(1.7) $$\psi(y) \overset{def}{=} \max_{x \in D_1} x^T A y = \max_j \sum_k a_{jk} y_k$$

minimaal wordt, dus

(1.8) $$v_2 \overset{def}{=} \min_{y \in D_2} \psi(y) = \min_{y \in D_2} \max_{j \in K} \sum_k a_{jk} y_k$$

De verz. D_1 en D_2 beide afgesloten en begrensd, de functies $\varphi(\underline{x})$ en $\psi(\underline{y})$ zijn continu op D_1, resp. D_2, er bestaan dus vectoren $\tilde{\underline{x}}$ en $\tilde{\underline{y}}$ zodanig dat

(1.9) $$V_1 = \varphi(\tilde{\underline{x}}), \qquad V_2 = \psi(\tilde{\underline{y}})$$

Omdat $\tilde{\underline{x}}$ en $\tilde{\underline{y}}$ kansverdelingen zijn volgt

$$V_1 = \varphi(\tilde{\underline{x}}) = \min_k \sum_j \tilde{x}_j a_{jk} \leq \sum_{j,k} \tilde{x}_j a_{jk} \tilde{y}_k$$

$$\leq \max_j \sum_k a_{jk} \tilde{y}_k = \psi(\tilde{y}) = V_2$$

d.w.z.

(1.10) $$V_1 \leq V_2.$$

<u>Opm. 2.</u> Kiest P_1 <u>alleen</u> zuivere strategieën dan is zijn winstverwachting w_1 (zie (1.6))

(1.11) $$w_1 = \max_j \min_k a_{jk}$$

Analoog voor P_2

(1.12) $$w_2 = \min_k \max_j a_{jk}$$

Uiteraard

(1.13) $$w_1 \leq V_1 \qquad V_2 \leq w_2$$

omdat V_1 een maximum is over een grotere verz. dan die waarover w_1 bepaald wordt.

Uit (1.10) en (1.11)

(1.14) $$w_1 \leq V_1 \leq V_2 \leq w_2$$

<u>Def.</u> 1.3. Is $w_1 = w_2$ dan spreken we van een <u>zadelpunts</u>spel

Opm. 3. In geval van een zadelpuntspel zijn er zuivere strat. voor beide spelers die optimaal zijn.

Voorbeeld 5

$$j\downarrow \overset{\rightarrow k}{\begin{bmatrix} 3 & \boxed{1} & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}}$$

$$w_1 = \max_j \min_k a_{jk} = \max(1, 0, -2) = 1 = a_{12}$$

$$w_2 = \min_k \max_j a_{jk} = \min(3, 1, 4) = 1 = a_{12}$$

a_{12} is dus een "zadelpunt"

dus $\quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Hoofdstelling voor Matrix spelen

We recapituleren

(2.1) $$v_1 = \max_{\underline{x} \in D_1} \varphi(\underline{x}) = \max_{\underline{x} \in D_1} \min_{k} \sum_j x_j a_{jk} \quad , \quad v_1 = \varphi(\tilde{\underline{x}})$$

(2.2) $$v_2 = \min_{\underline{y} \in D_2} \psi(\underline{y}) = \min_{\underline{y} \in D_2} \max_{j} \sum_k a_{jk} y_k \quad , \quad v_2 = \psi(\tilde{\underline{y}})$$

met $\tilde{\underline{x}}$ en $\tilde{\underline{y}}$ de optimale strategieën voor P_1 resp. P_2; bestaan van $\tilde{\underline{x}}$ en $\tilde{\underline{y}}$ reeds bewezen (zie blz. 7, form. 1.9).

De formulering (2.1) is equivalent met

(2.3) $$\sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \qquad \sum_{j=1}^{m} x_j a_{jk} + \zeta \geq 0 , \quad k = 1, \dots, n$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m$$
$$\zeta \text{ minimaal}$$

De formulering (2.2) is equivalent met

(2.4) $$\sum_{k=1}^{n} y_k = 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k + \eta \leq 0 , \quad j = 1, \dots, m$$
$$y_k \geq 0 , \quad k = 1, \dots, n$$
$$\eta \text{ maximaal}$$

Zij

(2.5) $$\underline{e}^m \in R_m \qquad e_k^m = 1 , \quad k = 1, \dots, m$$
$$\underline{e}^n \in R_n \qquad e_j^n = 1 , \quad j = 1, \dots, n$$

dan zijn (2.3) en (2.4) te schrijven als

(2.6) $$\underline{x}^T \underline{e}^m = 1 \qquad A^T \underline{x} - (-\zeta) \underline{e}^n \geq \underline{0} , \quad \underline{x} \geq \underline{0}$$
$$-\zeta \text{ maximaal;}$$

(2.7) $$\underline{y}^T \underline{e}^n = 1 \qquad A \underline{y} - (-\eta) \underline{e}^m \leq \underline{0} , \quad \underline{y} \geq \underline{0}$$
$$-\eta \text{ minimaal.}$$

De oplossing van (2.6) is $\tilde{x}$ en $-\xi = v_1$

" " " (2.7) " $\tilde{y}$ " $-\eta = v_2$

Opm. 1 Vervangen we in A

iedere a_{jk} door $a_{jk} + \alpha$,

dan volgt uit (2.1) en (2.2) vanwege $x \in D_1$, $y \in D_2$ dat

$$v_1 \to v_1 + \alpha,$$
$$v_2 \to v_2 + \alpha,$$

en door deze vervangingen wijzigt zich $\tilde{x}$ noch $\tilde{y}$.

Veronderstel daarom

(2.8) $$-\xi > 0, \quad -\eta > 0$$

Definieer

(2.9) $$\underline{u} \overset{def}{=} \frac{1}{-\xi}\,\underline{x}, \quad \underline{v} \overset{def}{=} \frac{1}{-\eta}\,\underline{y}$$

volgt uit (2.6), ..., (2.9)

(2.10) $$A^T \underline{u} \geq \underline{e}^n, \quad \underline{u} \geq \underline{0}, \quad \underline{u}^T \underline{e}^m \text{ minimaal}$$

(2.11) $$A\,\underline{v} \leq \underline{e}^m, \quad \underline{v} \geq \underline{0}, \quad \underline{v}^T \underline{e}^n \text{ maximaal}$$

Daarmee is het vinden van $\tilde{x}$ en $\tilde{y}$ tot een lin. progr. probleem terug gebracht

Stelling 2.1 (hoofdstelling voor de matrix spelen)
Voor matrix spel met de eindige actie verzamelingen Σ_1 en Σ_2 en uit beloningsmatrix A geldt

(2.12) $$v_1 = v_2.$$

Bewijs. (2.1) en (2.2) bezitten optimale oplossingen $\tilde{x}$ resp. $\tilde{y}$. De beide *duale* lin. progr. problemen (2.10) en (2.11) bezitten dus optimale oplossing $\tilde{u}$, resp. $\tilde{v}$.

Volgt uit St. 4.5 l.P. blz. 43 dat
of " 5.3 " 48

$$\tilde{u}^T e^m = \tilde{v}^T e^n$$

m.a.w. vanwege $\tilde{x}_1 \in D_1$, $\tilde{y} \in D_2$ en (2.5), (2.9)

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{-z_{opt}} = \frac{1}{-z_{opt}} \sum_{j=1}^{m} x_j = \frac{1}{-w_{opt}} \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{-w_{opt}} = \frac{1}{v_2} .$$

(w.t.b.w.)

Opm. 2. Uit bovenstaande volgt direct hoe de bepaling van de oplossing van een matrixspel via lin. progr. te verrichten is.

Def. 2.1 Het getal $v = v_1 = v_2$ heet de *waarde* van het matrixspel.

Opm. 3. Past P_1 de optimale strategie $\tilde{x}$ toe dan is verwachtingswaarde van zijn uitbetaling minstens v, welke strategie y P_2 ook toepast; analoog voor P_2.

Def. 2.2. Een matrixspel heet *fair* als $v = 0$ is.

Def 2.3. Een matrixspel heet *symmetrisch* als $A = -A^T$.

Stelling 2.2. Een symmetrisch matrixspel heeft de waarde 0 en beide spelers kunnen dezelfde optimale strategie toepassen.

Bewijs Vanwege A scheef sym. zijn de gebied verz. D_1 en D_2 van P_1, resp. P_2, dezelfde, $D_1 = D_2 = D$.

Uit (1.5), (1.7) en de hoofdstelling volgt

(2.13) $$\underline{x}^T A \tilde{\underline{y}} \le v = \tilde{\underline{x}}^T A \tilde{\underline{y}} \le \tilde{\underline{x}}^T A \underline{y} \qquad \forall \underline{x} \in D_1, \ \forall \underline{y} \in D_2$$

Vanwege scheefsymm. A volgt uit

$$\underline{x}^T A \underline{x} = (A\underline{x})^T \underline{x} = \underline{x}^T A^T \underline{x} = -\underline{x}^T A \underline{x}, \qquad \forall \underline{x} \in D$$

dus

(2.14) $$\underline{x}^T A \underline{x} = 0, \qquad \forall \underline{x} \in D$$

Zijn $\tilde{\underline{x}}$ en $\tilde{\underline{y}}$ opt. strat. voor P_1 resp. P_2 dan dus uit (2.14) en (2.13) met $\underline{x} = \tilde{\underline{y}}$; en $\underline{y} = \tilde{\underline{x}}$

$$0 = \tilde{\underline{y}}^T A \tilde{\underline{y}} \le v \le \tilde{\underline{x}}^T A \tilde{\underline{x}} = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Tenslotte kunnen beide spelers $\tilde{\underline{x}}$ als opt. strategie gebruiken, immers (verg. (2.13))

$$\underline{x}^T A \tilde{\underline{x}} \le 0 = \tilde{\underline{x}}^T A \tilde{\underline{x}} \le \tilde{\underline{x}}^T A \underline{x}, \qquad \forall \underline{x} \in D$$

waarin laatste ongelijkheid uit (2.13) volgt en waarin eerste ongelijkheid uit scheefsymm. zijn van A en uit de laatste ongelijkheid volgt. (w.t.b.w)

Opm. 4. Ieder symm. spel is dus fair. Het omgekeerde is natuurlijk niet juist. Daarentegen, heeft spel een waarde $v \neq 0$, dan heeft spel met zelfde strat. en uitbetalingsmatrix

$$\hat{a}_{jk} = a_{jk} - v$$

een waarde $= 0$ en is dus fair (zie opm. 1).

Voorbeeld 6. (vergl. vb. 4, blz. 4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

We lossen op $\quad A\underline{v} \le \underline{e}^m$, $\underline{v} \ge \underline{0}$, $-\underline{v}^T\underline{e}^4$ minimaal

t_1, t_2 zijn slack var.
vergl. (2.11)

	x v_1	v_2	v_3	v_4		
t_1	[2]	-3	-1	1	1	1/2
t_2	0	2	1	2	1	–
	1	1	1	1	0	
	-2	1	0	-3	-1	

	t_1	v_2	x v_3	v_4		
v_1	1/2	-3/2	-1/2	1/2	1/2	–
x t_2	0	2	[1]	2	1	1
	-1/2	5/2	3/2	1/2	-1/2	
	1	-2	-1	-2	0	

	t_1	v_2	t_2	v_4	
v_1	1/2	-1/2	1/2	1½	1
v_3	0	2	1	2	1
	-1/2	-1/2	-3/2	-5/2	-2
	1	0	1	0	1

$\longrightarrow \quad \tilde{\underline{v}} = [1, 0, 1, 0]^T \qquad Q(\tilde{\underline{v}}) = -2$

$\downarrow$ zie (2.9)

$\tilde{\underline{y}} = \frac{1}{2}[1, 0, 1, 0]^T \leftarrow \quad v = 1/2$

$\downarrow$ zie (4.23) L.P. 46c.

$\tilde{\underline{x}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]^T$

hetgeen zelfde opl. als op blz. 4

Voorbeeld 7

We lossen op

$A\underline{v} \leq \underline{e}^3$, $\underline{v} \geq \underline{0}$

$-\underline{v}^T \underline{e}^3$ min.

t_1, t_2, t_3 slack var.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$w_1 = \max_j \min_k a_{jk} = \max_j(-2,-1,-1) = -1$

$w_2 = \min_k \max_j a_{jk} = \min_k (2,1,1) = 1$

$\Rightarrow$ $w_1 \neq w_2$ er is geen zadelpunt

	v_1	v_2 *	v_3		
t_1	1	−1	−2	1	−
* t_2	−1	[1]	1	1	1
t_3	2	−1	0	1	−
	1	1	1	0	
	−2	1	1	−2	

→

	v_1 *	t_2	v_3		
t_1	0	1	−1	2	−
v_2	−1	1	1	1	−
x t_3	[1]	1	1	2	2
	2	−1	0	−1	
	−1	−1	0	−3	

↓

	t_3	t_2	v_3	
t_1	0	1	−1	2
v_2	1	2	2	3
v_1	1	1	1	2
	−2	−3	−2	−5
	1	0	1	−1

←

$\tilde{\underline{v}} = [2, 3, 0]^T$

↓

$\tilde{\underline{y}} = \frac{1}{5}[2, 3, 0]^T$ opt. strat. P_2

$\tilde{\underline{x}} = \frac{1}{5}[0, 3, 2]^T$,, ,, P_1